Ron Larson Calculus 阅读笔记

> 学习本教材的目的是：
>
> 1. 掌握微积分基础知识
> 2. 巩固计算能力
>
> 前 5 章内容分别为：微积分前置知识，极限，微分，微分的应用，一些常见的指对数和超越函数介绍。内容较为简单，因此这里不再详细展示。本笔记从第六章：微分方程的解法开始。

Chapter 6：微分方程

> 本章最开始介绍了`Slope Field`，即一个函数的导数与其变量 x 和 y 相关，这种形式的方程称为微分方程，我们可以通过取点在图上画出它的函数图像，而后可以通过欧拉法近似的对它进行求解。而后又介绍了增长和衰减微分方程，这是微分方程的应用体现。接下来的就是几种常见微分方程形式的解法，我们直接进入正题。此外，P443-444 有大量基础习题可供练习。本章应用题未做。

可分离变量微分方程

- 对形如$M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0$的式子：进行分离变量，然后两边同时积分，得到一个不定积分

齐次微分方程

- 对具备$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$特性的函数，我们称之为齐次函数。
- 一个包含齐次函数的微分方程$y'=f(x,y)$或$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$，可以通过换元，令$u=\frac{y}{x}$。
- 此时$y=ux$，那么$y'=u'x+u$。用u替换$f(x,y)$中的$\frac{y}{x}$；用$u'x+u$替换y'，可以得到一个关于u和x的可分离变量的微分方程，然后遵循前一条的方法进行积分。得出结果后用$\frac{y}{x}$替换掉u

一阶线性微分方程

- 形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，$P(x)$和$Q(x)$都是关于 x 的连续函数，这种形式被称为标准形。对于一个线性微分方程，我们需要先将其转化为标准型，得到$P(x)$和$Q(x)$。然后：
- 首先我们对$P(x)$进行积分，得到$u(x)=e^{\int P(x)dx}$，$u(x)$被称之为`integrating factor`
- 方程的通解是$y=\frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)dx$
- 这个结果的原因是：对$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$左右同乘以$u(x)$后，式子的左边刚好是两个函数的导数的形式$(y*u(x))'=Q(x)*u(x)$，其中一个函数就是$u(x)$，而右边也对$Q(x)$同乘了$u(x)$，因此对两边积分，就可以得到方程的通解（这是一个巧妙的小发现！但是我还不知道为什么，以后总会知道的！）
- 注意：
  - 求解的时候，要注意常数项在积分后的括号里，不要漏掉它了
  - 在求解应用的时候，可以注意一下限制条件，有条件的去除绝对值符号
  - 此外，求$u(x)$那个不定积分时，不需要带常数
- 应用包括（课本 P441，445-446 面有较多的应用习题）
  - 混合物问题
  - 空气阻力问题
  - RL 电路电流求解问题

伯努利方程（n 阶非线性微分方程）

- 可以降阶到 1 阶线性
- 形如$y'+P(x)y=Q(x)y^n$
- n=0 时，为一阶线性微分方程
- n=1 时，为可以分离变量的微分方程
- 其他阶次时，推导如下：
  1. 首先对两边同时乘以y^{-n}，可以得到：$y^{-n}y'+y^{1-n}P(x)=Q(x)$
  2. 然后对两边同时乘以$1-n$，可以得到$(1-n)y^{-n}y'+(1-n)y^{1-n}P(x)=(1-n)Q(x)$
  3. 然后我们可以发现，最左边的那一项，其实就是$(y^{1-n})'$，因此我们可以将其化成$(y^{1-n})'+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$
  4. 观察上面那个式子，其实他是$(y^{1-n})'$的一阶线性微分方程，对这个方程，其
     $P_1(x)=(1-n)P(x)$
     $Q_1(x)=(1-n)Q(x)$
     然后可以用之前的方式计算它的通解，只不过这里需要把y替换为y^{1-n}

总结

SUMMARY OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Method	*Form of Equation*
1. Separable variables:	$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$
2. Homogeneous:	$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, where M and N are nth-degree homogeneous functions
3. Linear:	$y' + P(x)y = Q(x)$
4. Bernoulli equation:	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$

习题类型

- 可分离变量的微分方程的通解求解
- slope field 的绘制（先确定几个坐标点处的斜率，然后再绘制图像）
- 一阶线性微分方程的通解求解
- 齐次微分方程的通解求解
- 伯努利微分方程的通解求解
- 证明某个函数是某个微分方程的通解，并且求它的特解
- 几个应用模型

Chapter 7：积分的应用

> 本章的重点在于计算

求两曲线之间所夹的面积

- 注意哪条曲线在上，哪条在下
- 可以选择不同的切割方法

求体积

- 圆盘法：部分立体图形需要借助一些几何关系，而不只是题目所给的函数
  - 基础旋转
  - 绕非 x 轴旋转
  - 两曲线之间相夹部分旋转
  - 绕 y 轴旋转
  - 横切和纵切，寻找立体图形的几何关系

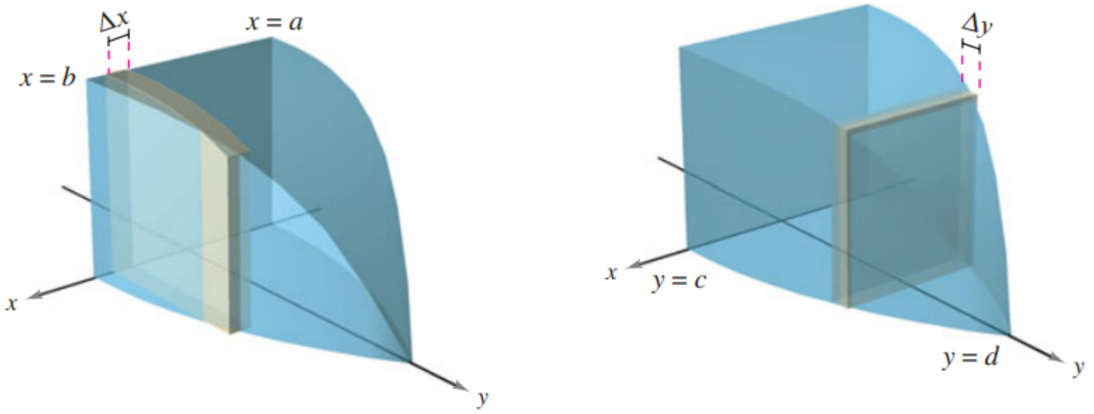
VOLUMES OF SOLIDS WITH KNOWN CROSS SECTIONS

1. For cross sections of area $A(x)$ taken perpendicular to the x-axis,

$$\text{Volume} = \int_a^b A(x)\,dx. \qquad \text{See Figure 7.24(a).}$$

2. For cross sections of area $A(y)$ taken perpendicular to the y-axis,

$$\text{Volume} = \int_c^d A(y)\,dy. \qquad \text{See Figure 7.24(b).}$$



(a) Cross sections perpendicular to x-axis

(b) Cross sections perpendicular to y-axis

Figure 7.24

- 易错点
  - 图形搞错
  - 上下界搞错
  - 计算不仔细
  - 部分体积做题时容易忽略
- 应当刷题巩固
- 壳层法

求弧长

- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dx^2)(1 + (\frac{dy}{dx})^2)} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx = \sqrt{1 + y'}dx$
- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dy^2)(1 + (\frac{dx}{dy})^2)} = \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}dy = \sqrt{1 + x'}dy$

求旋转体的表面积

- $dS = 2\pi r ds$
- 如果r是关于 x 的函数$f(x)$，那么$dS = 2\pi f(x)\sqrt{1 + y'}dx$
- 否则，$dS = 2\pi f(y)\sqrt{1 + x'}dy$

求功

- 力为常量：$W = Fx$
- 力为变量：$W = \int_a^b F(x)dx$
- 三种常见的力学定律
  - 弹力定律：$F = kd$
  - 引力定律：$F = k\frac{m_1m_2}{d}$
  - 库仑定律：$F = k\frac{q_1q_2}{d}$

求矩，重心和质心

- 矩：$Moment = mx$
- 对于一维平面：
  - 关于源点的矩：$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n$
  - 质心：$\bar{x} = \frac{M_0}{m}$
- 对于二维平面，且平面质量密度为 1：
  - 关于 x 轴的矩：$M_x = m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n$
  - 关于 y 轴的矩：$M_y = m_1y_1 + m_2y_2 + ... + m_ny_n$
  - 质心 x 坐标：$\bar{x} = \frac{M_x}{m}$
  - 质心 y 坐标：$\bar{y} = \frac{M_u}{m}$
- 需要解释的是，在矩的计算过程中的x_n和y_n并不是普通的而坐标，而是x轴上该坐标和源点轴的距离。譬如关于$x = 3$的矩中，$x_1 = x - 3$
- 对于一块夹在$f(x)$和$g(x)$中的平面，且平面质量密度为ρ
  - 首先，要求矩和质心，我们需要知道 3 个值
    - 总质量
    - x 轴上，单个单位的质量与相对距离的积的和
    - y 轴上，单个单位的质量与相对距离的积的和
  - 因此我们需要将问题拆解为几个步骤：
    - 面积求解
    - 总质量求解
    - 单个单位的质量求解
    - 单个单位与对称轴的相对距离求解
    - 单个单位面积的矩求解
  - 该平面的总质量=密度 * 面积，也就是$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x) - g(x)dx$
  - 对 x 轴：
    - x 轴上x_i处的质量 $m_i = \rho dA = \rho(f(x_i) - g(x_i))dx$
    - x 轴上x_i处的矩 = $m_ix_i = \rho(f(x_i) - g(x_i))x_idx$
    - x 轴上的矩的大小为$M_x = \int_a^b \rho(f(x) - g(x))xdx$
    - 关于 x 轴的质心为：$\bar{x} = \frac{M_x}{m}$
  - 对 y 轴：
    - x_i处的质量与 x 轴的情况下相同，$m_i = \rho dA = \rho(f(x_i) - g(x_i))dx$
    - y 轴上y_i处的矩 = $m_iy_i = \rho(f(x_i) - g(x_i))\frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}dx$

    - y 轴上矩的大小为$M_y = \int_a^b \rho(f(x) - g(x))\frac{f(x)+g(x)}{2}dx$
    - 关于 y 轴的质心为：$\bar{y} = \frac{M_y}{m}$

求流体压强和流体作用力

- 液体压强$P = wh$，其中w是单位体积的液体密度，h是深度
- 流体作用力的大小$F = PA = whA$，其中 P 是压强，A 是面积
- 当物体横跨不同深度时，情况如下：
  - 这其中的变量有多个：
    - 深度
    - 面积
  - 我们需要对不同深度下的压强微元进行积分，我们将
    - 当前微元所在的深度表示为$h(y_i)$

      > 为什么直接用y_i作为深度，是因为如果 y 轴向上建系，那么水下的y_i是个负数，深度h是个正数，所以通常$h(y_i) = -y_i$

    - 当前微元的长度为L_{y_i}
    - 当前微元的宽度为dy
  - 那么两个变量的值分别为：
    - 深度$h(y_i)$
    - 面积$L(y_i)dy$
  - 那么当前微元的压强为$dP = wh(y_i)L(y_i)dy$
  - 那么总的压强为$P = \int_c^d wh(y)L(y)dy$

Chapter 8：积分技巧，洛必达法则及反常积分

> 本章的重点在于计算

基础换元方法

- 比较下列三种的解法差别：
  - $\int \frac{4}{x^2+9}dx$：该式子基于$arctan\frac{x}{3}$ 的导数，稍作变换即可
  - $\int \frac{4x}{x^2+9}dx$：使用换元法，令$u = x^2 + 9$，则$du = 2xdx$，即可求解
  - $\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx$：将$4x^2$拆分为$4(x^2 + 9) - 36$，然后将式子改为$\int 4dx + \int \frac{-36}{x^2+9}dx$，然后用第一个式子的积分方法
- 利用反三角函数的导数换元：形如$a^2 - u^2$，利用 $(arcsinx)' = \frac{1}{1-x^2}$
- 分式转化，如将$\frac{1}{1+e^x}$转化为$1 - \frac{e^x}{1+e^x}$
- 利用基本的换元法
- 使用三角函数的基本性质换元
  - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

- $\cos 2x = 2cos^2x - 1 = cos^2x - sin^2x = 1 - 2sin^2x$

- 一些重要的积分公式（可以参见课本 P523）

PROCEDURES FOR FITTING INTEGRANDS TO BASIC INTEGRATION RULES

Technique	*Example*
Expand (numerator).	$(1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separate numerator.	$\frac{1+x}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}$
Complete the square.	$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Divide improper rational function.	$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$
Add and subtract terms in numerator.	$\frac{2x}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$
Use trigonometric identities.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiply and divide by Pythagorean conjugate.	$\frac{1}{1+\sin x} = \left(\frac{1}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$ $= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

分部积分法

- 基于$(uv)' = u'v + v'u$
- 因此 $uv = \int u'v + \int v'u$，因此可以得到$\int udv = uv - \int vdu$
- 两项重要考点
  - 找准u和v
  - 使用多次分部积分来求解$f^n(x)$的积分问题，尤其是高次幂三角函数中的积分问题
  - 重要的积分表

SUMMARY OF COMMON INTEGRALS USING INTEGRATION BY PARTS

1. For integrals of the form

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \qquad \int x^n \sin ax\,dx, \qquad \text{or} \qquad \int x^n \cos ax\,dx$$

let $u = x^n$ and let $dv = e^{ax}\,dx$, $\sin ax\,dx$, or $\cos ax\,dx$.

2. For integrals of the form

$$\int x^n \ln x\,dx, \qquad \int x^n \arcsin ax\,dx, \qquad \text{or} \qquad \int x^n \arctan ax\,dx$$

let $u = \ln x$, $\arcsin ax$, or $\arctan ax$ and let $dv = x^n\,dx$.

3. For integrals of the form

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx \qquad \text{or} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

let $u = \sin bx$ or $\cos bx$ and let $dv = e^{ax}\,dx$.

  - 使用 Tabular Method 解决问题（参见课本 P532）

EXAMPLE 7 Using the Tabular Method

Find $\int x^2 \sin 4x \, dx$.

Solution Begin as usual by letting $u = x^2$ and $dv = v' \, dx = \sin 4x \, dx$. Next, create a table consisting of three columns, as shown.

Alternate Signs	*u and Its Derivatives*	*v′ and Its Antiderivatives*
$+$	x^2	$\sin 4x$
$-$	$2x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
$+$	2	$-\frac{1}{16}\sin 4x$
$-$	0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

Differentiate until you obtain 0 as a derivative.

The solution is obtained by adding the signed products of the diagonal entries:

$$\int x^2 \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4}x^2 \cos 4x + \frac{1}{8}x \sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C.$$

> For more information on the tabular method, see the article "Tabular Integration by Parts" by David Horowitz in The College Mathematics Journal, and the article "More on Tabular Integration by Parts" by Leonard Gillman in The College Mathematics Journal. To view these articles, go to the website www.matharticles.com.

多次幂三角积分法

- $\sin x$和$\cos x$一族
  - $\int \sin^m(x) \cos^n(x)$
  - 重要公式
    - $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
  - 4 种情况
    - m 为奇数，n 为偶数
      - 拆一个$sin(x)$出来，其他的用$(sin^2(x))^k$替代
      - 将$sin^2(x)$用$1 - cos^2(x)$替代
    - m 为偶数，n 为奇数
      - 拆一个$cos(x)$出来，其他的用$(cos^2(x))^k$替代
      - 将$cos^2(x)$用$1 - sin^2(x)$替代
    - m，n 均为偶数
      - $sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$
      - $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$
    - 只有$cos(x)$或$sin(x)$且次数为偶数
      - 不断地利用倍角公式降次：

        - $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$
        - $sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$
    - 只有$cos(x)$或$sin(x)$且次数为奇数怎么办？不知道。。。
  - m=n=1 时的几种情况：

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin[(m-n)x] + \sin[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

- $\tan x$和$\sec x$一族
  - $\int sec^m(x)tan^n(x)$
  - 5 种情况
    - m 为偶数且为正
      - 拆出一个$sec^2(x)$作为$\tan x$的导数，其他的$sec^2(x)$转化为$1+\tan^2(x)$
    - n 为奇数且为正
      - 拆出一个$\sec x \tan x$，其他的$\tan^2(x)$转化为$\sec^2(x)-1$
    - 无$\tan x$且 m 为奇数且为正
      - 使用分部积分法（上一节）
    - 无$\sec x$且 n 为奇数且为正
      - 拆出一个$\tan^2(x)$，将其转化为$\sec^2(x)-1$，对剩余的部分继续这样转化
    - 上述没有一个符合->转化为$\sin$和$\cos$，然后根据其规律求解
- $\cot x$和$\csc x$一族（本书未详细讲述这一点，该知识点可以参考《Calculus with Analytic Geometry》和《Thomas Calculus》

三角换元法

- 三种常见分母（最后利用三角形进行还原工作）
  - $\sqrt{a^2-u^2}$：利用恒等式$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$，令$u = a\sin\theta$
  - $\sqrt{a^2+u^2}$：利用恒等式$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$，令$u = a\tan\theta$
  - $\sqrt{u^2-a^2}$：利用恒等式$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$，令$u = a\sec\theta$
- 另外三种常见分子：（教材 P549）

THEOREM 8.2 SPECIAL INTEGRATION FORMULAS ($a > 0$)

1. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin \frac{u}{a} + u\sqrt{a^2 - u^2}\right) + C$
2. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$
3. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|\right) + C$

- 应用
  - 求解弧长
  - 比较流体作用力

有理分式积分法

查表法（这个不多说，就是查表）

不定式和洛必达法则

- 不定式
  - 0/0 型和 $\frac{\infty}{\infty}$
  - 其他形式：转化为上述两种
- 对分子分母求其导数的极限，如果其导数还是不定式，就继续求导，直到其为非不定式为止
- 注意：慎用！很多不定式可能越求导越复杂！

反常积分

- 函数可能不是连续的，中间有无穷间断点，那么我们就不能直接对整个定义域求积分，求出来的值是不正确的。需要将其划分为多个段，分别求积分
- 对于包含无穷间断点的定义域，求积分的方法是：将无穷间断点替换为常数，求解其积分，然后取 $\lim_{c \to \infty}$
- 一个重要的反常积分，涉及到 $\frac{1}{x^p}$ 函数的敛散性

THEOREM 8.5 A SPECIAL TYPE OF IMPROPER INTEGRAL

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{if } p > 1 \\ \text{diverges}, & \text{if } p \leq 1 \end{cases}$$

> 学完这章后完成 Chapter 7-8 的习题，并完善笔记

Chapter 9：无穷级数*

> 边学习边完成习题

序列

- 数列极限的定义 & 数列敛散性的定义
  - 设现有一实数 L，数列极限为 L 可以用如下定义表示

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

- 判定序列的敛散性
  - 假设对于任意的 ϵ，都有一正数 M，当 $n > M$ 时，总有 $|a_n - L| < \epsilon$。如果这个 L 存在，那么我们说数列收敛到 L；否则就说数列发散。
  - 几何特征：当数列收敛到 L 时，当 $n > M$ 时，a_n 的值就在 $L-\epsilon$ 和 $L+\epsilon$ 之间
- 数列极限和函数极限的联系

  > 一个重要的函数极限

  $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

  还有一个重要的数列极限比较

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{n!} = 0$$

  也就是说阶乘函数的增长速率笔任何指数函数都快。
  - 自然语言定义
    - 如果在正整数 n 上，a_n 和 $f(n)$ 的值都相同，并且当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 收敛到 L，那么当 $n\to\infty$ 时，数列也收敛到 L
  - 数学语言定义
    - 设存在 L ，和一函数 $f(x)$
    - 当 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$，且对于每个正整数 n 都有 $a_n = f(n)$
    - 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
  - 应用
    - 判断数列是否收敛：寻找和该数列对应的函数极限，如果该函数极限存在，那么该数列收敛，否则就不收敛
    - 夹逼准则：如果两个数列 a_n 和 b_n 夹着一个数列 c_n，如果这两个数列的极限都是 L，那么数列 c_n 的极限也是 L
      - 夹逼准则应用：判断一个数列是否收敛，并且找到它的极限
        - 使用放缩法确定夹住该数列且收敛到同一极限的两个数列
- 数列极限的性质
  - 数列的加减乘除和数乘会带来数列极限的加减乘除和数乘
  - 设现有数列 a_n，如果它的绝对值数列 $|a_n|$ 收敛到 0，那么这个数列收敛到 0 （注意不是 L，因为 $|a_n|$ 和 $-|a_n|$ 是关于 x 轴对称的，如果他们收敛的话，极限一定是 0）
    - 证明：使用夹逼准则

        - 因为 $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$，而因为 $|a_n|$ 收敛到 0，而 $-|a_n|$ 收敛到 0
        - 那么数列 a_n 收敛到 0
- 单调序列和有界序列的性质及利用

级数及其敛散性

- 收敛无穷级数的定义
    - 无穷级数：无穷序列的累加和
    - 如果无穷级数的累加和发散，那么该序列发散
- 几何级数的性质

> 注意：级数是否收敛和从第几项开始计数无关，因为前面几项的和是常数项

- 公式（$a \neq 0$）

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

- 敛散性判断
    - 条件 1：当 $|r| > 1$（ar^{n+1} 不能省略不计，因为 $|r| > 1$）

$$\begin{aligned} & S_n = a + ar + ar^2 + \dot{+} ar^n \\ & rS_n = ar + ar^2 + \dot{+} ar^n + ar^{n+1} \\ & (r-1)S_n = ar^{n+1} - a = a(r^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

因此

$$S_n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

我们将 $(r^{n+1} - 1)$ 除以 $r - 1$

$$r^{n+1} - 1 = (r-1)(r^n + r^{n-1} + \ldots)$$

那么

$$S_n = r^n + r^{n-1} + \ldots$$

因此，如果 $|r| > 1$，那么 S_n 没有边界，因此该无穷级数发散
    - 条件 2：当 $|r| < 1$ 时（ar^{n+1} 因为过小，可以省略不计）

$$\begin{aligned} & S_n = a + ar + ar^2 + ar^n \\ & rS_n = ar + ar^2 + ar^n \\ & (1-r)S_n = a \end{aligned}$$

那么

$$S_n = \frac{a}{1 - r}$$

该无穷级数收敛

- 条件 3：当 $|r| = 1$ 时

$$S_n = a + a + \cdots + a = na$$

当 $n \to \infty$, $S_n \to \infty$，因此该无穷级数发散

- 总结
  - 对于无穷级数 $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$
  - 当 $|r| < 1$ 时，无穷级数收敛
  - 当 $|r| \geq 1$ 时，无穷级数发散

- 无穷级数的性质：对无穷级数加、减、数乘的结果，就等于分别对其极限做加、减和数乘
- 使用 `n-th test` 判断无穷级数的敛散性
  - 如果一个无穷级数收敛，其第 n 项的极限必须为 0

  > 注意：这是个等价命题，也就是说由如果一个无穷级数收敛，其第 n 项的极限必须为 0；那么如果一个数列其第 n 项的不极限为 0，其一定发散。

  - 原因：如果一个无穷级数收敛，代表当 $n \to \infty$ 时，其 S_n 和 S_{n-1} 都相同，那么也就是说 a_n 的极限为 0

积分判定法 & p-series

- 使用积分判定法，确定无穷级数的敛散性

> 积分判定法和后面的一些判定法是针对正项级数的（也就是级数里面的项都是正数）

- 如果一个数列和一个函数的每一项都相同，并且这个函数当 $x \geq 1$ 时为正、递减、连续，那么 $\sum_1^{\infty} a_n$ 和 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同
- 原因：无穷级数实际上就是间隔为 1 的函数的黎曼和
- 证明
  - 先假设数列 a_n 和 $f(x)$ 的每一项都相同，且函数 $f(x)$ 递减，并且当 $x \to \infty$ 时，$f(x) \to L$
  - 现有两个西格玛的和 $\sum_{i=2}^{n} f(i)$ 和 $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$

$$\Sigma_{i=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$
$$\Sigma_{i=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

  - 因为函数 $f(x)$ 递减，因此 $f(1) > f(n)$。又因为我们要估计的是 $\int_1^{\infty} f(x)dx$，根据面积关系，存在如下不等式

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

  - 设 $S_n = \sum_{i=1}^{n}$，那么存在如下关系式

$$\sum_{i=2}^{n} = S_n - f(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} = S_{n-1} = S_n - f(n)$$

- 因此存在如下不等式

$$S_n - f(1) \leq \int_1^\infty f(x)dx \leq S_{n-1} = S_n - f(n)$$

- 因为 $\int_1^\infty f(x)dx$ 收敛到 L，那么存在 $S_n \leq L + f(1)$，那么 S_n 递减且收敛；同时收敛得证
- 此外，如果 $\int_1^\infty f(x)dx$ 发散的话，那么其值为 ∞，因为 $S_n > \int_1^\infty f(x)dx + f(n)$，那么 S_n 也为 ∞；同时发散得证

- 积分判定法的应用：p 级数和调和级数敛散性判断

> 再次提示，在使用积分法判断级数敛散性时，可以从任意一个常数开始（因为 $n = 1$ 时可能存在无定义的情况，如 $\frac{1}{n \ln n}$）

  - `p-series`

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

  - `p-series` 中 $p = 1$ 的一个特殊形式：调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

    - 调和级数的通用形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an + b}$$

    - 调和级数的作用：音乐中的和弦
  - 利用积分判定法判断 `p-series` 敛散性
    - 回顾：`p-series` 的格式如下

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

    - 普通方法判断敛散性
      - 因为函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 和该数列的每一个正数项都有同样的值，因此现在有两个求和函数

$$\sum_{n=1}^{n-1} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

$$\sum_{n=2}^{n} f(i) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

- 下面我们需要分别判断几种情况
  - $p = 1$ 时，为调和级数
  - $0 < p < 1$ 时
  - $p > 1$ 时
  - $p = 0$ 时
  - $p < 0$ 时
- $p = 1$ 时：函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 递减，因此 $a_n = \frac{1}{n}$ 也递减。下面我们要证明级数 S_n 收敛
  - 因为存在 $f(1) > f(n)$，那么存在不等式

$$\sum_{n=2}^{n} f(i) < \int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{n-1} f(i)$$

  - 因为

$$\sum_{n=2}^{n} f(i) = S_n - f(1)$$

$$\sum_{n=1}^{n-1} f(i) = S_{n-1} = S_n - f(n)$$

  - 那么

$$S_n - f(1) < \int_1^{\infty} f(x)dx < S_n - f(n)$$

  - 根据反常积分的计算

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b \to \infty} (\ln x|_1^b) = \infty$$

  - 该积分发散
  - 因为

$$S_n > f(n) + \int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$$

  - 因此该无穷级数发散
- $0 < p < 1$ 时：当 $x \geq 1$ 时，函数 $f(x) = \frac{1}{x^p} > \frac{1}{x}$，根据上面的推理，可以知道这里 $S_n = \infty$，该无穷级数发散
- $p > 1$ 时：函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 递减
  - 根据上述的推理，我们只需要判断其积分式子是否为一个常数值，如果是，那么该级数收敛

        - 积分式子为

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}) = \frac{-}{-p}$$

        - 这个积分是一个常数，该级数收敛！
    - $p = 0$ 时，$f(x) = 1$，这个级数不收敛
    - $p < 0$ 时，$f(x) = x^{-p}$，这里 $-p$ 为正，这个级数不收敛
  - 积分法判断敛散性
    - $p = 0$，原式为 $f(x) = 1$，级数发散
    - $p = 1$，原式为 $f(x) = \frac{1}{x}$，积分后为 $F(x) = \ln x$，当 $b \to \infty$ 时，值趋近于无穷，发散
    - $0 < p < 1$ 时，原式为 $f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{x^p}$，发散
    - $p > 1$ 时，积分如下，收敛

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}) = \frac{-1}{-p+1}$$

    - $p < 0$ 时，为幂级数，发散
  - 总结
    - $p > 1$ 时收敛
    - $0 \leq p \leq 1$ 时发散
    - $p < 0$ 时发散

级数比较

> 适用于级数长得不是很好看，但是和一些比较简单的级数又有一些相似度的情况。譬如 $\frac{1}{2^n}$ 和 $\frac{n}{2^n}$。依然要注意的是，我们的比较可以从某个常数项开始，不需要非要从第一个序号开始。

- 直接比较法

  > 重点：找个长得比较像的简单相似数列（如几何级数、幂级数、`p-series`、或者 `p-series` 中最经典的调和级数）。比较常用的级数寻找方法是去掉该级数中所有的数乘和加法项，还原到只有根式的情况。

  - 设存在

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

  - 如果 b_n 收敛，那么 a_n 也收敛
  - 如果 a_n 发散，b_n 也发散
- 极限比较法

  > 当一个级数长得像几何级数或者 `p-series`，但是使用直接比较法又得不出什么有效的结论，这个时候你就需要动用极限比较法

- 回顾，将两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限进行比较

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

  - 如果这个结果为 1 ，说明 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的等价无穷小，说明两个函数趋近于 0 的速度一样快
  - 如果这个结果为常数 c，说明是同阶无穷小
  - 如果这个结果是 0，说明 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的高阶无穷小，说明当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 趋近于 0 的速度比 $g(x)$ 快得多
  - 如果这个结果是 ∞，说明 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的低阶无穷小，说明当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 趋近于 0 的速度比 $f(x)$ 快得多
- 极限比较法，顾名思义也就是比较两个级数的极限，假设 $a_n>0$ 且 $b_n>0$（都是正项级数），公式如下

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

  并且 L 不是 ∞ 且为正数，那么这两个极限同时收敛或发散
- 证明
  - 我们对原公式进行一些变形，当 $n\to\infty$ 时

$$0<a_n=Lb_n<(L+1)b_n$$

  - 根据直接比较法，我们可以看到，如果 $\sum b_n$ 收敛，那么 $\sum a_n$ 收敛
  - 反之，如果 a_n 发散，那么 b_n 发散
  - 将原极限式子改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{L}$$

  - 改写过后可以推导出同样的结论

交错级数

- 交错级数的特征：数列中的项正负号交替，形如以下结构

$$\sum_{1}^{n}(-1)^n a_n$$

  或者

$$\sum_{1}^{n}(-1)^{n+1} a_n$$

- 使用交错级数测试判断无穷级数收敛性
  - 交错级数的收敛条件有 2 个
    - $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

    - $a_{n+1} \leq a_n$
  - 交错级数收敛条件证明

    > 证明时遇到无法判断前后项大小的情况，需要进行一系列的变换，然后再进行判断

    - 要证明一个级数收敛，那么其必须存在一个极限 L
    - 我们要证明的是在 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 且 $a_{n+1} \leq a_n$ 的情况下，级数存在极限 L
    - 我们将 S_{2n} 表示如下

$$S_{2n} = (a_1 - a2) + (a_3 - a4) + (a5 - a6) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

    - 该级数又可以表示为

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a3) - (a_4 - a5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

    - 又因为存在 $a_{n+1} \leq a_n$，因此括号中的每一项都是正数，那么存在

$$S_{2n} \leq a_1$$

    - 因此 S_{2n} 是一个有界且递减的序列，我们设其收敛到 L，因为

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n}$$

    - 又因为

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

    - 因此

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L + 0 = L$$

    - 因为 S_{2n-1} 的极限和 S_{2n} 的极限相同，那么我们可以推得 $\lim_{n\to\infty} S_n = L$
    - 交错级数收敛得证
- 收敛交错级数的余项
  - 无穷级数的和（算不出来）我们用 S 表示，$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$
  - S 和 S_n 的值是有差距的，当 n 足够大时，我们可以用 S_n 近似表示 S，其差值我们用一个余项 R_N 来表示
  - 定理：如果一个交错级数收敛 $(-1)^N a_N$（满足两个条件）到 L，那么其余项的绝对值小于 a_{N+1}，也就是

$$|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}$$

  - 推导如下

$$R_N = S - S_N = (-1)^{N+1}a_{N+1} + (-1)^{N+2}a_{N+2} + (-1)^{N+3}a_{N+3} + \dots$$
$$= (-1)^{N+1}(a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} + \dots)$$

$$|R_N| = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + \dots$$
$$= a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \dots < a_{N+1}$$

- 有正有负的非交错级数的收敛判断

> 注意：这条结论反过来就不行，也就是说 $\sum_{n=1}^{n} a_n$ 收敛不一定代表着 $\sum |a_n|$ 收敛（如交错调和级数）。这样的情况称为条件收敛。

  - 判断其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{n} |a_n|$ 是否收敛，如果该无穷级数收敛，那么该级数本身收敛
  - 证明
    - 我们的目的是通过 $|a_n|$ 收敛（有一个极限），证明 a_n 收敛（有一个极限）
    - 我们将 a_n 写成 $(a_n + |a_n|) - |a_n|$，我们首先证明 $a_n + |a_n|$ 收敛，因为 $|a_n|$ 收敛，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在极限 L
    - 因为 $0 < a_n + |a_n| < 2|a_n|$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} 2|a_n| = 2L$
    - $a_n + |a_n|$ 必然收敛，又因为 $|a_n|$ 存在极限 L，因此 a_n 必然存在极限 L
- 对无穷级数的项进行重新排序
  - 如果这个无穷级数是绝对收敛，那么排序后和不改变
  - 如果这个无穷级数是条件收敛，那么排序后和改变

比例判定法 & 求根判定法

- 无穷级数敛散性的比例判定法（`ratio test`）
  - 对于项不为 0 的数列
  - 绝对收敛

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$$

    - 证明
      - 假设

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = r < 1$$

      - 那么存在

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}| < r|a_n| \\
&|a_{n+2}| < r|a_{n+1}| = r^2|a_n| \\
&|a_{n+3}| < r|a_{n+2}| = r^3|a_n| \\
&\dots
\end{aligned}$$

      - 因此从第 n 项开始的无穷级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{N+n}| = |a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+n}| < |a_N| + r|a_N| + r^2|a_N| + r^3|a$$

- 又因为后者为几何级数，当 $|r| < 1$ 时收敛
- 那么根据绝对收敛的条件，当绝对无穷级数收敛时，该级数本身也收敛

- 发散

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$$

- 不好判断

> 例如：
> $\sum\frac{1}{n}$ 发散而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$$

- 无穷级数敛散性的求根判定法（`root test`）
  - 该方法适用于数列通项中存在 n 次幂的结构，以及用 `ratio-test` 不太好解的情况。 同样是 3 条结论
  - 假设现有级数 $\sum a_n$
  - 收敛

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

  - 发散

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$$

  - 不确定

> 在任何情况下，`root-test` 都无法判断 `p-series` 的敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

- 无穷级数的敛散判定过程总结
  - 第 n 项是否趋近于 0，如果不是，该级数发散

    - 这个级数是否是几种特殊类型级数：几何级数、`p-series`、裂项求和级数，或者交错级数
    - 积分测试、比例测试、求根测试能用吗
    - 这个级数能和一些特殊级数进行直接比较或者极限比较吗？
- 无穷级数的多个敛散判定方式总结

SUMMARY OF TESTS FOR SERIES

Test	Series	Condition(s) of Convergence	Condition(s) of Divergence	Comment
nth-Term	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	This test cannot be used to show convergence.
Geometric Series	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\lvert r\rvert < 1$	$\lvert r\rvert \geq 1$	Sum: $S = \dfrac{a}{1-r}$
Telescoping Series	$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} b_n = L$		Sum: $S = b_1 - L$
p-Series	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$	
Alternating Series	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$		Remainder: $\lvert R_N\rvert \leq a_{N+1}$
Integral (f is continuous, positive, and decreasing)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = f(n) \geq 0$	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converges	$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverges	Remainder: $0 < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$
Root	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$ or $= \infty$	Test is inconclusive if $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = 1$.
Ratio	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1$ or $= \infty$	Test is inconclusive if $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = 1$.
Direct Comparison ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 < a_n \leq b_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges	$0 < b_n \leq a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges	
Limit Comparison ($a_n, b_n > 0$)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges	$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverges	

滚动鼠标轴或单击，开始截长图

泰勒多项式和近似（函数上）

> 注意：这个近似多项式是在某一点附近近似，并不是在整个定义域上近似

- 初等函数的多项式近似

- 设现有一个函数 $f(x)$，该函数比较复杂，我们无法直接看出它的特性；现在我们想要找到一个多项式函数 $P(x)$，让该多项式在某点 $x=a$ 附近接近该函数
- 首先我们想让 $x=a$ 时 $P(a)=f(a)$，那么我们可以构造一个线性函数，该函数在该点和 $f(x)$ 相切。那么该点处的切线斜率为 $f'(a)$，其值为 $f(a)$。公式如下

  $$\frac{P(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

  那么 $P(x)$ 为

  $$P(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

- 但是一阶近似我们觉得不满足，我们还想让 $P''(a)=f''(a)$，也就是两函数在该点的二阶导数也相同，那么我们就需要用二次函数 $P(x)=ax^2+bx+c$ 来表达，这个二次函数需要同时满足一阶导相等和二阶导相等的特点
- 如果说我们对二阶近似也不满意，想用三阶近似？甚至我们对三阶近似还不满意，想要用更高阶的近似多项式？那么方法同理，构造更高阶的函数，来近似表达它
- 例如
  - 我们想要找到 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 这一点的近似多项式
  - $f(x)=e^x$ 性质：在 $x=0$ 这一点的所有值（包括函数值、高阶导）都为 1
  - 线性近似
    - 设 $P(x)=ax+b$，我们需要 $P(0)=1$，那么 $b=1$；又因为 $P'(0)=1$，因此 $a=1$，那么 $P(x)=x+1$，或者说 $P(x)=P'(0)x+P(0)$
  - 二次函数近似
    - 设 $P(x)=ax^2+bx+c$，我们需要 $P(0)$ 到 $P^{(3)}(0)$ 都为 1
    - 对 $P(x)$ 求多次导数，其结果如下

      $$\begin{aligned}&P(x)=ax^2+bx+c\\&P'(x)=2ax+b\\&P''(x)=2a\end{aligned}$$

    - 我们想要的是

      $$\begin{aligned}&P(0)=1\\&P'(0)=1\\&P''(0)=1\end{aligned}$$

    - 而当 $x=0$ 时，存在如下关系

      $$\begin{aligned}&P(0)=c=1\\&P'(0)=b=1\\&P''(0)=2a=1\end{aligned}$$

      那么 $a=\frac{1}{2}$，$P(x)$ 的公式为

      $$P(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$$

    - 我们可以归纳如下

$$P(x)=\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{1!}x+1$$

- 为什么是 $2!$ 和 $1!$，是因为这里 2 和 1 分别是原公式和一阶导下，与 x 相关联的最高次项

- 高阶近似多项式的通式：麦克劳林多项式和泰勒多项式

> 注意：麦克劳林多项式和泰勒多项式的结构相同，其主要的差别在于一个是 $x=0$ 附近的多项式近似；另一个是 $x=a$ 附近的多项式近似；从麦克劳林多项式到泰勒多项式，只需要把 x 替换为 $(x-a)$，把 $f(0)$ 替换为 $f(a)$ 即可。后面所学的余弦公式总体结构也类似，思想也类似，后期不再赘述；

- $x=0$ 附近的高阶近似多项式推导（麦克劳林多项式）
  - 设现有一个 $f(x)$，其最高次为 n。我们的目的是要找到最高次为 n 的多项式函数 $P(x)$。$P(x)$ 的形式如下

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n$$

  - 我们的目的是让 $P(0)$ 到 $P^{(n)}(0)$ 的值都和 $f(0)$ 到 $f^{(n)}(0)$ 相同
  - 我们来观察一下 $P(x)$ 的各阶导数的结构，以及它们和 $f(x)$ 及其各阶导数的关系

$$\begin{aligned}
&P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x^1+a_n\\
&P'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}\\
&P''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}\\
&\ldots\\
&P^{(n-1)}(x)=n(n-1)\ldots(2)a_0x+(n-1)(n-2)\ldots(2)a_1\\
&P^{(n)}(x)=n!a_0
\end{aligned}$$

  - 我们需要满足的是 $x=0$ 时 $f(x)$ 的各阶导数和 $P(x)$ 的各阶导数相同
  - 根据前文推理可得，当 $x=0$ 时，从 $P(x)$ 到 $P^{(n)}(x)$，留下的是

$$\begin{aligned}
&a_n=f(0)\\
&a_{n-1}=f'(0)\\
&2a_{n-2}=f''(0)\\
&\ldots\\
&(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)a_1=f^{(n-1)}(0)\\
&n!a_0=f^{(n)}(0)
\end{aligned}$$

  - 进行一下移向可得

$$\begin{aligned} a_n &= f(0) \\ a_{n-1} &= f'(0) \\ a_{n-2} &= \frac{f''(0)}{2!} \\ a_1 &= \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ a_0 &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

- 那么我们便推导出了 n 阶近似情况下 $P(x)$ 的公式

$$P(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + f'(0)x + f(0)$$

- 高阶近似多项式拓展到 $x = a$（泰勒多项式）
  - 前文我们推导出的公式只在 $x = 0$ 下适用，这是因为当 $x = 0$ 时，该导数常数部分外的项全部消失；那么根据这个思想，我们可以将其扩展到 $x = a$ 附近，只需要将 x 替换为 $(x - a)$，把 $f(0)$ 替换为 $f(a)$ 即可

$$P(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + f'(a)(x-a)$$

- 皮亚诺余项和拉格朗日余项

> 关于泰勒余项，可以参考这个油管视频：泰勒展开续集——拉格朗日余项如何推导？有何含义？ (youtube.com) 推导过程比较长，这里就不展示了。此外，集中余项的详细介绍可以参考这里：七、泰勒公式与泰勒级数 (drhuang.com)

- 余项的由来
  - 因为我们在多项式近似的过程中，只近似到 n 阶导，那么我们近似出来的值与实际的结果之间总是有误差的，这个误差也就是余项。衡量误差的方式各有不同，皮亚诺和拉格朗日分别用了不同的办法来推导这个误差。
  - 误差的衡量方法包括做差法和做商法
- 皮亚诺余项
  - 皮亚诺适用做商法来衡量误差，其核心思想是将剩下未计算的高阶项和最后一项的比值作为误差。要使近似的多项式和原函数接近，那么就需要让未计算的部分尽可能地小
  - 那么什么是尽可能地小呢？也就是远远小于多项式最后一项
  - 比了以后发现只有当 x 无限趋近于 a 时，可以达到这个要求
  - 皮亚诺将这个余项表示为 $n+1$ 次方的高阶无穷小，也就是

$$R_n = o((x-a)^{n+1})$$

- 拉格朗日余项（利用拉格朗日定理和柯西中值定理）

> 至于为什么证明的过程中常用拉格朗日余项而不是皮亚诺余项，可以参考这个知乎回答：为什么证明题往往不使用皮亚诺余项的泰勒定理？ - Scarborough Fair

> 的回答 - 知乎

- 拉格朗日的目的也是用一个公式 R_n 来表达后面项，这个公式是一个具体的公式，而不是一个高阶无穷小
- 首先，从 $n+1$ 次开始的项的格式如下

$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(x-a)^{n+2}+\dots$$

- 拉格朗日从这个公式中发现所有的项都有一个 $(x-a)^{n+1}$，那么就提取出了公因式，研究剩下的部分
- 而他后来又发现当 $x=a$ 时，除了第一项以外的其他的项都被消去
- 于是他利用拉格朗日公式和柯西公式推导出了下面这个余项公式（推导过程就偷懒不写啦！）

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- 四个经典的麦克劳林/泰勒公式近似
  - $f(x)=e^x$ 的麦克劳林近似

> 要注意该公式的特点为：系数 $a_n=\frac{1}{n!}$

- 该函数的各阶高阶导数都是 e^x，因此所有高阶导数的值都为 $e^0=1$
- 因此

$$P(x)=\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\dots+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$$

  - $f(x)=\ln x$ 的泰勒近似（$x=1$ 附近）

> 要注意该公式的特点为：系数 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{c^n n}$，其中多项式围绕 $x=c$ 点求解

- 首先 $f(1)=\ln 1=0$
- $f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$
- $f''(x)=\frac{-1}{x^2}, f''(1)=-1$
- $f'''(x)=\frac{2}{x^3}, f'''(1)=2$
- 可以总结得出对于 $f(x)=\ln x$，其导数存在如下形式

> 注意此处的 x 不是后面多项式 $P(x)$ 中的 x（或许我应该换个字母，但是这里我想表达的是 $\ln x$ 高阶导数的通用形式）

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

- 那么系数 a_n 为

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n n}$$

- 将某个值 c 带入到其中可得

$$\frac{(-1)^{n-1}}{c^n n}$$

- 因此

> 此处是 $x = c$ 附近的多项式近似

$$P(x) = (x-c) + \frac{-1}{2}(x-c)^2 + \frac{2}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{c^n n}(x-c)^n$$

- $f(x) = \sin x$ 的麦克劳林近似

> 该系数的特点是：分母依然是阶乘，而分子中从 $f^{(0)}(x)$ 到 $f^(4)(x)$，形成了一个周期性的规律：$0, 1, 0, -1$。因此，$\sin x$ 的麦克劳林展开式中没有偶数项，而且奇数项的分母是 1 和 -1 交替。

- $f(x) = \sin x, f(0) = 0$
- $f'(x) = \cos x, f'(0) = 1$
- $f''(x) = -\sin x, f''(0) = 0$
- $f'''(x) = -\cos x, f'''(0) = -1$
- $f^{(4)}(x) = \sin x, f^{(4)}(0) = 0$
- 因此公式如下

$$P(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$$

- $f(x) = \cos x$ 的麦克劳林近似

> 该系数的特点是：分母依然是阶乘，而分子中从 0 阶导数到 4 阶导数，新城了一个周期性的规律：$1, 0, -1, 0$。因此，$\cos x$ 的麦克劳林展开式中没有奇数项，而且偶数项的分母是 1 和 -1 交替。此外，要注意的是 $\cos x$ 的展开式和 $\sin x$ 展开式的系数变化刚好相反。

- $f(x) = \cos x, f(0) = 1$
- $f'(x) = -\sin x, f'(0) = 0$
- $f''(x) = -\cos x, f''(0) = -1$
- $f'''(x) = \sin x, f^{(3)}(0) = 0$
- $f^{(4)}(x) = \cos x, f^{(4)}(0) = 1$
- 因此公式如下

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

幂级数（级数上）

> 幂级数和复分析有关系，但是我暂时还没有学到复分析。

- 麦克劳林公式复习

$$P(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots+\frac{f''(0)}{2!}x^2+f'(0)x+f(0)$$

- 理解幂级数定义

  > 很多类型的函数都可以用幂级数表示。幂级数包括了麦克劳林级数和泰勒级数。

  - 形如以下形式（围绕 $x=0$）

  $$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\ldots$$

  - 或以下形式的级数

  $$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n$$

- 找到幂级数的收敛半径和收敛区间

  > 这里我一开始不能理解幂级数收敛是什么意思，直到我看了这个回答，并且回顾了 MIT Single Variable Calculus 的34 泰勒级数_哔哩哔哩_bilibili 和 35 期末复习_哔哩哔哩_bilibili 两节课。

  - 两个问题
    - 数列、无穷级数、函数、泰勒和麦克劳林公式和幂级数之间有什么联系？

    > 可以参考这里：Calculus II - Power Series and Functions (lamar.edu)

    - 数列是一个离散的序列，从 $n=1$ 到 $n=\infty$，每一项是数列通项在该序号下的值
    - **无穷级数**是数列中元素的和，其可以从 $n=1$ 开始计算，也可以从任意正整数开始计算
    - **函数**和数列以及无穷级数的差别在于，它的定义域不是离散的，是连续的
    - **泰勒和麦克劳林公式**是函数在某一点附近的近似多项式函数
    - **幂级数**的项是无穷的，类似无穷级数，而其每一项都是 a_nx^n；而其形式又类似泰勒和麦克劳林公式
    - 总结：幂级数本质上是一个无穷级数，而其形式酷似泰勒和麦克劳林公式。其区别在于，泰勒和麦克劳林公式是一个函数在某一点附近的近似多项式函数，当展开到某一节导数时，他们的项是有限的；而幂级数的项是无限的。这样，我们便将多个内容联系了起来

函数 $\xrightarrow{\text{某点周围近似}}$ 泰勒和麦克劳林公式 (有限项) $\xrightarrow{\text{是一种}}$ 幂级数（无限项） $\xrightarrow{\text{本质}}$ 无穷级数 $\xrightarrow{\text{具有}}$ 敛散性

  - 为什么要确定幂级数的收敛半径和收敛区间?
  - 这里需要回到我们幂级数和函数之间的关系，幂级数是无限项的，但是如果在收敛区间内，它的值可以归纳到一个具体的数值。
  - 以几何级数为例：

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a}{1-r}$$

当 $|r| < 1$ 时，这个级数收敛；其他情况下这个级数发散；这里的 r 是不确定的。a 是一个常数，n 是项数；
当我们把 r 替换成 x，就可以得到

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

这里的 x 的变量。根据前面的定义，我们知道，如果 $|x| < 1$，那么这个式子可以等于

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

这里的 $\frac{1}{1-x}$ 是一个关于 x 的函数。需要注意的是由左边转化为右边的这个条件，也就是 $|x| < 1$。那么我们知道，只有在收敛半径内，函数才可能与幂级数联系起来。

- 前提：幂级数可以看作是一个关于 x 的函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

其中 f 的定义域是幂级数收敛条件下的所有 x 的集合。

- 收敛半径定义：幂级数的收敛半径有 3 种
  - 仅限制在一个点 $x = c$ 内，因为当 $x = c$ 的时候，其结果为 1（因为 $0^0 = 1$）。此时收敛半径 $R = 0$
  - 存在一个收敛半径 R，当 $|x-c| < R$ 时收敛，$|x-c| > R$ 时发散
  - 对于所有的 x，这个级数都收敛，那么收敛半径为 ∞
- 收敛半径的求解
  - 无穷级数敛散性回顾

    > 其实我这里有点没太懂为什么一定要用 `ratio-test` 来判断收敛半径？网上说还可以用 `root-test`，但是这里没有给出相应的例题。

    - 一个无穷级数是否收敛，需要利用之前的各种判定方法
    - 其中一个方法是 `ratio-test`，该方法的前提是这个数列的项不为 0，判断

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

        的值是否小于 1
        - 在判断的时候，有时能够直接看出这个比值趋近于 ∞，那么 $R=0$；有的时候会得到一个关于 x 的不等式，通过让不等式小于 1，来解得 x 的范围；有的时候在任何情况下都小于 1，那么收敛半径就是 ∞

- 确定幂级数收敛区间端点处的敛散性
    - 区间的开闭存在四种状态
        - 左开，右开
        - 左闭，右闭
        - 左开，右闭
        - 左闭，右开
    - 对于端点处的敛散性，我们需要对每个端点进行分别讨论
    - 讨论的方法是分别将每个端点的值带入原幂级数，然后判断该级数的敛散性。如果发散的话，这个端点处就取开区间；否则就取闭区间。
- 幂级数的敛散性讨论方法总结
    1. 利用 `ratio-test`，找到幂级数的收敛半径
    2. 确定幂级数的收敛区间
    3. 带入收敛区间的两个端点，判断端点处的敛散性，确定区间的开闭
- 幂级数的微分和积分

    > 这里的用处我们会在后面看到，在收敛区间内，函数的微分和积分，和它对应的级数的微分和积分是同步的。如果我们无法直接求解一个函数对应的级数，我们可以通过微分或者积分转化为 $\frac{a}{1-x}$ 类似的形式，求解对应无穷级数。对这个无穷级数进行微分/积分操作，再求解其收敛半径。

    - 我们可以通过幂级数来研究函数的性质：我们可以对幂级数进行微分和积分操作，其效果和对函数微分和积分等效。此外，在进行微积分操作后，收敛半径不变。但是收敛区间可能会改变，因此我们在对幂级数进行微积分后，还需要利用 `ratio-test`（或者 `root-test`？）讨论一下新的收敛区间。

用幂级数表示函数（联系函数与级数）

- 找到一个函数的几何幂级数

    > 课本这里的描述又开始不清不楚起来了，还是得上油管查相关视频：

    - 幂级数的通式复习

    $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

    - 幂级数的几个变式：从函数到级数

        > 这里教材中没有考虑围绕 $x=c$ 点左右的情况，只讨论了围绕 $x=0$ 左右的情况

        - 当 $a_n=1$，$c=0$时

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

该级数为几何级数，当 $|x| < 1$ 时，存在

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

将几何级数和函数 $\frac{1}{1-x}$ 联系起来

- 当 $a_n = a$，$c = 0$ 时，幂级数的和为

$$\sum_{n=0}^{n} ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n = \frac{a}{1-x} = f(x)$$

- 从这里我们可以看到，如果我们要找到一个带分式的函数的级数表达式，我们首先要做的就是把它整理成 $\frac{a}{1-x}$ 的形式，然后找到这里的 a 和 x，将其还原到 $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ 中去。
- 那么如何找到收敛半径呢？我们知道几何级数的收敛半径是 $|x| < 1$，那么在求出对应的 x 的表达式，我们就要把 x 对应的式子带入到这个不等式中去，求解出收敛区间。接下来我们需要对收敛区间端点处的敛散性进行判断，得出确切的收敛区间。

- 求解组合幂级数对应的无穷级数

> 原则思想：通过因式分解或者提取公因式求解组合函数。此外，如果说给的函数不是 $\frac{a}{1-r}$ 形式的话，我们就需要通过积分或者求导转化为这个形式的函数，求解对应的无穷级数。然后再对这个无穷级数做微分/积分，求解其收敛半径。

- 前面我们只能求解幂级数对应的几何级数，这节我们研究多个初等函数对应的无穷级数
- 几种组合函数对应的级数
  - 设 $f(x) = \sum a_n x^n$，$g(x) = \sum b_n x^n$
  - $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$
  - $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$
  - $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$
- 收敛区间求解：**组合函数对应级数的收敛区间，是这两个函数分别构成级数的收敛区间的交**

泰勒和麦克劳林级数

- 找到一个函数的泰勒和麦克劳林级数

> 课本 P 680 面的描述又开始含糊不清起来了，真让人头疼。

- 本节讲解了找到一个函数对应的级数的通用方法
- 对于包含 c 的开区间 I 上的 x，如果 $f(x)$ 可以用无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$，那么

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

且

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

- 此外，如果对于区间 I 上所有的 x 都有

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$$

那么关于 f 的泰勒级数收敛且等于 $f(x)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

- 二项式级数
  - 对一个形如 $f(x) = (1+x)^k$ 的函数，我们现在来求它的麦克劳林级数，以及其收敛半径
  - 该函数的几阶导数如下

$$\begin{aligned}
&f(x) = (1+x)^k \\
&f'(x) = k(1+x)^{k-1} \\
&f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \\
&\dots \\
&f^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-n}
\end{aligned}$$

  - 因为，我们在高中数学中学过

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  - 又因为麦克劳林级数是关于 $x=0$ 的，因此可得

$$f^{(n)}(0) = A_n^k$$

  - 那么其对应的泰勒级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^k}{n!} x^n$$

  - 我们利用 `ratio-test` 来求解其收敛半径

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \\
&= \lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{A_{n+1}^k}{(n+1)!}x^{(n+1)}}{\frac{A_n^k}{n!}x^n}| \\
&= \lim_{n\to\infty}|\frac{x(k-n)}{(n+1)}| \\
&= \lim_{n\to\infty}|x||\frac{-(n+1)+(1+k)}{n+1}| \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}|-1+\frac{1+k}{1+n}| \\
&= |x|
\end{aligned}
$$

- 由因为对于幂级数，收敛半径为 1，因此存在 $|x|<1$，那么收敛区间是 $(-1,1)$
- 对于一个特定的二项式函数，我们要找到他对应的泰勒级数，只需要找到对应的 k，然后带入即可。而该泰勒级数的收敛半径依然为 1，其收敛区间还是 $|x|<1$。

- 函数及其对应的泰勒级数总结

> 注：可以通过对幂级数的组合来求解对应的复合函数展开式。

POWER SERIES FOR ELEMENTARY FUNCTIONS

Function	*Interval of Convergence*
$\frac{1}{x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots$	$0<x<2$
$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$	$-1<x<1$
$\ln x = (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\cdots$	$0<x\le 2$
$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	$-1\le x\le 1$
$\arcsin x = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)}+\cdots$	$-1\le x\le 1$
$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!}+\cdots$	$-1<x<1$*

* The convergence at $x=\pm 1$ depends on the value of k.

数列收敛判断方法总结

- 判断其对应的函数是否收敛
- 使用夹逼准则找到夹着这个数列的两个收敛到同一值的数列
- 对于数值正负倒的数列，判断其绝对值数列是否收敛到 0
- 如果一个数列有界并且非递增，那么其收敛

无穷级数收敛判断方法总结

- 对于**几何级数** $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$，判断其收敛半径 $|r|$ 是否小于 1
- 正项级数
  - 对于**正项级数**（级数里面的每一项都为正）
    - 积分法（与函数极限结合）：如果一个数列和一个函数的每一项都相同，并且这个函数当 $x \geq 1$ 时为正、递减、连续，那么 $\sum_{1}^{\infty} a_n$ 和 $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同
      - 经典应用：`p-series`（包括调和级数）
  - 对于两个**正项级数**，长得和基本级数（如几何级数、幂级数、`p-series` 长得很像，但又不一样的级数）使用将该级数和与其长得比较像的基本级数直接比较的方法，判断级数是否收敛或发散
  - 对于直接比较法比较不出来的**正项级数**，使用将两个级数的极限比较的方法，判断级数是否收敛或发散
- 交错级数 (形如 $(-1)^N a_N$ 或者 $(-1)^{N+1} a_N$，也就是说必须正一项负一项)
  - 对于交错级数，如果存在 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$，且 $a_{n+1} \leq a_n$，那么交错级数收敛到一个值 L
- 存在**正负交替的非交错级数**（不是正一项负一项，可能正好几项然后负好几项）
  - 判断其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{n} |a_n|$ 是否收敛，判断过程中可以利用前面几个方法
  - 如果绝对值级数收敛，那么该无穷级数一定收敛，我们称之为绝对收敛
  - 如果该无穷级数收敛，那么其绝对值级数不一定收敛，我们称之为条件收敛
- 对于**项不为 0** 的数列

> 注意：这个判断适用于**项不为 0 的数列**，如果说这两个判定不成功的话，可能需要利用前面的几个判断手段来判别级数的敛散性

  - `ratio-test`
    - 先存在非 0 数列 a_n
    - 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$，那么收敛
    - 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ 或 $\lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$，那么发散
    - 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$，那么无法判断
  - `root-test`（该方法适用于数列通项中存在 n 次幂的结构，或者使用 `ratio-test` 不太好判断的情况，注意不适用于 `p-series`）
    - 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$，那么收敛
    - 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ 或 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$，那么发散
    - 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$，那么无法判断

发散无穷级数的性质

- 如果一个无穷级数的第 n 项的极限不为 0，则该无穷级数一定发散

收敛无穷级数的性质

- 对于收敛的无穷级数，其第 n 项的极限必须等于 0

函数与级数

- 从函数到级数
- 将级数归纳为函数

Chapter 10：圆锥曲线，参数方程和极坐标*

圆锥曲线和微积分

- 圆锥曲线的理解
  - 一个三维空间中的圆锥和一个平面（不过原点）相切构成的形状叫圆锥曲线
  - 如果该平面过了原点，那么会导致生成的圆锥曲线降次，生成的图像的最高次不到 2 次
  - 圆锥曲线的三种定义
    - 几何定义：一个圆锥和不过原点的平面相切形成的图形
    - 代数定义：表达式如下的图形

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

    - 解析几何定义：满足某个几何特征的代数方程
      - 如定义圆为到某个点 (x_0, y_0) 距离相等的点
- 抛物线的理解和方程
  - 抛物线定义：距离某条线（准线）和某个点（焦点）距离相等的点，抛物线关于 x 或者 y 轴对称；准线与对称轴的交点坐标，与焦点坐标的中点称之为顶点（`vertex`）
  - 假设抛物线顶点为 (h, k)，**顶点与焦点之间的距离为 p (注意很多书籍中定义 p 为准线到焦点的距离，这里我们定义的是顶点到焦点的距离)**
  - 简单情况下抛物线方程推导
    - 抛物线顶点为 $(0, 0)$，焦点为 $(p, 0)$，准线为 $x = -p$，开口向右
    - 抛物线的定义是和焦点及准线距离相同的点，设抛物线上的点的坐标为 (x, y)，用代数表达如下

$$x + p = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

    - 两边同时平方得到

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

    - 将其进行化简得到

$$4px = y^2$$

  - 下面我们根据之前学过的图像变换来得到抛物线的其他通用变式
  - 若抛物线关于 x 轴对称（基于 $y^2 = 4px$）

        - 抛物线开口向右
            - 顶点为 (h,k)，焦点为 $(h+p,k)$，准线为 $x=h-p$
            - 首先图像向上移动 h 个单位，然后向右移动 k 个单位：
              $(y-h)^2=4p(x-k)$
        - 抛物线开口向左（图像根据 x 轴翻转，基于 $y^2=-4px$）
            - 顶点为 (h,k)，焦点为 $(h-p,k)$，准线为 $x=h+p$
            - 首先图像向上移动 h 个单位，然后向右移动 k 个单位：
              $(y-h)^2=-4p(x-k)$
    - 若抛物线关于 y 轴对称（基于 $x^2=4py$）
        - 抛物线开口向上
            - 顶点为 (h,k)，焦点为 $(h,k+p)$，准线为 $(h,k-p)$
            - 首先图像向上移动 h 个单位，然后向右移动 k 个单位：
              $(x-h)^2=4p(y-k)$
        - 抛物线开口向下（图像根据 y 轴翻转，基于 $x^2=-4py$）
            - 顶点为 (h,k)，焦点为 $(h,k-p)$，准线为 $(h,k+p)$
            - 首先图像向上移动 h 个单位，然后向右移动 k 个单位：
              $(x-h)^2=-4p(y-k)$
    - 抛物线相关问题求解
        - 先画成标准型，然后再确定相关的性质
        - 抛物线的弧长求解：直接带入弧长求解公式即可
- 椭圆的理解和方程
    - 定义：一条轴上有两个点，到这两个点距离之和相同的点构成的形状，就是椭圆

      An **ellipse** is the set of all points (x, y) the sum of whose distances from two distinct fixed points called **foci** is constant. (See Figure 10.7.) The line through the foci intersects the ellipse at two points, called the **vertices.** The chord joining the vertices is the **major axis,** and its midpoint is the **center** of the ellipse. The chord perpendicular to the major axis at the center is the **minor axis** of the ellipse. (See Figure 10.8.)

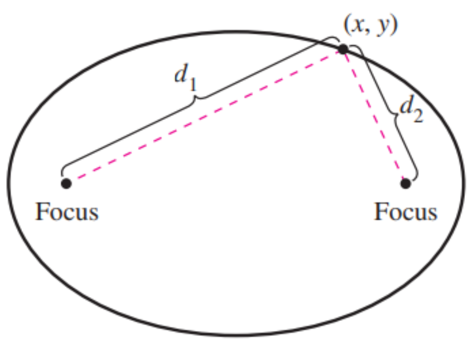


Figure 10.7

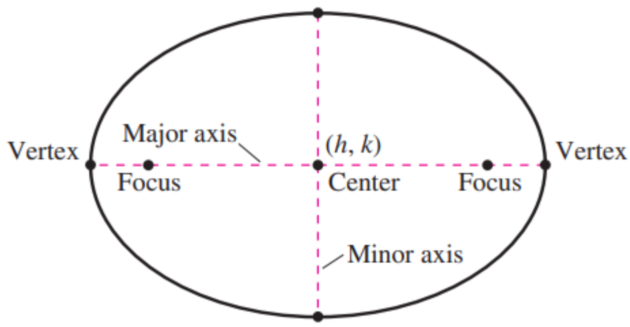


Figure 10.8

    - 椭圆的标准形式
      假设椭圆的中心点为 (h,k)，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$，焦距 $c^2=a^2-b^2$
        - 长轴在 x 轴上

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

- 长轴在 y 轴上

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}+\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

- 椭圆的离心率 e 定义如下

$$e=\frac{c}{a}$$

- 双曲线的理解和方程
  - 定义：一条轴上有两个点，到这两个点的距离之差相同的点构成的形状，就是双曲线
  - 双曲线的标准形式
    - 设双曲线的中心点为 (h,k) ，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$
    - 若主轴为 x 轴

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

    - 若主轴为 y 轴

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

    - 其焦距为 $c^2=a^2+b^2$
    - 其离心率依然是

$$e=\frac{c}{a}$$

平面曲线和参数方程

> 需要注意的是，不同的参数方程可能绘制出来的是同一条曲线。但是其区别在于其轨迹方向不同，以及行走的速度不同。

- 平面曲线的定义
  - x 和 y 都由一个变量 t 表示

$$x=f(t)$$
$$y=g(t)$$

  这个方程称为曲线的参数方程
  - 图像是定义域不同 t 下的 (x,y) 的坐标组合
  - 参数方程和图像的结合，构成了平面曲线，称为 C
- 一组参数方程定义的曲线的图像绘制
  - 按定义域从小到大取不同的 t，按时间顺序形成一系列的 (x,y) 坐标，这个叫做曲线轨迹的定向 (`orientation`)“

- 平面曲线方程 vs 参数方程
  - 平面曲线方程给出了曲线中的 (x, y) 点坐标的集合，以及曲线的方程
  - 参数方程给出了某一时刻轨迹上某点的位置、方向和速度
- 一组参数方程的参数消元：需要注意的是消元后 x 和 y 的范围，以及确定轨迹行走的方向
- 寻找用来表达曲线的一组参数方程
  - 举例：摆线方程推导

    > 参考资料：Cycloid - Wikipedia

    首先，摆线是一个球滚动的时候，其边缘某个点 P 的轨迹。

    下面我们来推导摆线的参数方程：
    - 我们这样假设：这个球的半径是 r，在一段时间 t 内，转过的角度是 θ
    - 在这段时间里，这个边缘点走过的路程是 $r\theta$，弧线划过的长度是 $r\theta$，而从起点到当前触地点的距离也是 $r\theta$
    - 我们发现，无论 θ 的大小是多少，总存在如下关系

      $$x = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$
      $$y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

      其中 x 和 y 都是关于 θ 的函数，可以写成 $x(\theta)$ 和 $y(\theta)$
    - 此外，摆线在 $\theta = 2n\pi r(n = 0, 1, 2, \dots)$ 的点上，都有尖角。通过求导可得

      $$x'(\theta) = r(1 - \cos\theta)$$
      $$y'(\theta) = r\sin\theta$$

      当 $x'(\theta)$ 和 $y'(\theta)$ 同时为 0 的时候，会出现尖角，也就是 $\cos\theta = 1$ 且 $\sin\theta = 0$，那么 $\theta = 2\pi n$

    > 这里需要插入一下平滑曲线的定义：如果一个曲线用 $x = f(t)$ 和 $y = g(t)$ 表示，在区间 I 上， f' 和 g' 都是连续函数，且不同时为 0（除了区间 I 的端点），那么就称曲线在区间 I 上平滑。如果说曲线在区间 I 的多个段上平滑，但是整体不平滑的话，我们就称其为 `piecewise smooth`

  - 等时降线问题（`tautochrone curve`）：
    - 不详细介绍，具体可参考这个油管视频 Tautochrone Curve: The curve of equal time descent | Virtual Gravity Solution (youtube.com)
  - 最速降线问题 （`Brachistochrone curve`）
    - 不详细介绍，具体可参考这里：最速降线问题 - 维基百科，自由的百科全书 (wikipedia.org)

参数方程和微积分

- 参数方程曲线的切线斜率计算
  - 参数方程曲线斜率计算

- 设平滑参数曲线 C 由 $x=f(t), y=g(t)$ 定义，那么 (x,y) 点处曲线的斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

  其中 $\frac{dx}{dt}\neq 0$
- 推导

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{f(t+\Delta t)-f(t)}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}}{\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}}\\&=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}}\\&=\frac{g'(t)}{f'(t)}\end{aligned}$$

- 参数方程二阶导计算（曲线的凹凸）

> 注意：可能存在同一点存在不同斜率。这时的 t 不同，不能直接根据 $y=f(x)$ 去看

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}[\frac{dy}{dx}]=\frac{\frac{d}{dt}[\frac{dy}{dx}]}{\frac{dx}{dt}}$$

- 参数方程三阶导计算

> 其推导过程和二阶导相似

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}[\frac{d^2y}{dx^2}]}{\frac{dx}{dt}}$$

- 参数方程曲线的弧长计算
  - $y=f(x)$ 下的弧长公式计算复习

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

  - 参数方程曲线下的弧长公式推导

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}})^2(\frac{dx}{dt})}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}dt$$

- 参数方程曲线的旋转体表面积计算

> 我们可以发现，绕 x 轴旋转和绕 y 轴旋转的表面积计算区别在于计算面积微元时，一个半径是 $g(t)$（也就是 y），一个半径是 $f(t)$（也就是 x），其他的方面没有区别。

- 复习：旋转体表面积为，一小段弧长下的面积微元的累加。而这个面积微元可以看作半径为 x 或 y，厚度为 dL 的圆盘。平面曲线方程和参数曲线方程在这一点上的区别为，平面曲线方程直接用的是 x 和 y，而参数方程曲线中的 $x=f(t)$、$y=g(t)$。其总体思想是一致的。
- 如果绕 x 轴旋转

$$S=2\pi ds=2\pi\int_a^b g(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}dt$$

- 如果绕 y 轴旋转

$$S=2\pi ds=2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}dt$$

极坐标和极坐标下的几个经典图形

- 极坐标理解
  - r：从原点到该点的距离
  - θ：该射线与 x 轴正向在逆时针方向上的夹角
- 坐标系之间的转换
  - 直角坐标到极坐标（用直角坐标表示极坐标）
    - $r^2=x^2+y^2$
    - $\tan\theta=\frac{y}{x}$
  - 极坐标到直角坐标（用极坐标表示直角坐标）
    - $x=r\cos\theta$
    - $y=r\sin\theta$
- 绘制极坐标图像：首先写出极坐标方程对应的 x 和 y 的表达式，然后确定多个 (x,y) 的点坐标，绘制图像
- 极坐标图像的切线斜率
  在极坐标中有 2 个变量：r 和 θ。这里我们假设 r 是关于 θ 的一个可导函数 $f(\theta)$，那么存在如下关系式

$$x(\theta)=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$$
$$y(\theta)=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

  那么我们可以推导出 x 和 y 关于 θ 的导数

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

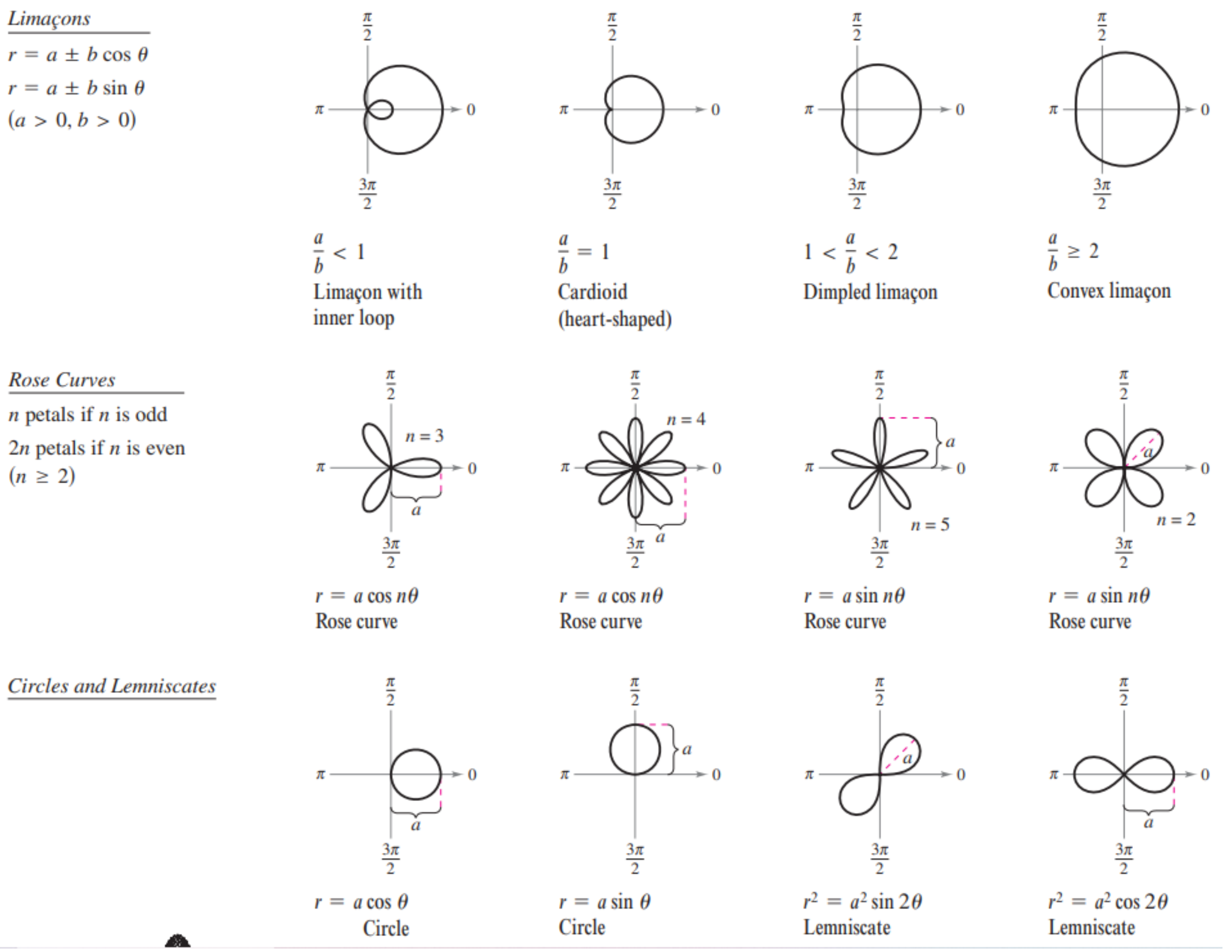
  因为普通坐标系的斜率是 $\frac{dy}{dx}$，当 $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$ 时，我们可以将上述式子带入得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

由此可得:

- 当 $\frac{dy}{d\theta}=0$ 且 $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$ 时，有一条水平切线
- 当 $\frac{dx}{d\theta}=0$ 且 $\frac{dy}{d\theta}\neq 0$ 时，有一条垂直切线
  此外，还有一个额外的结论：如果一个函数 $f(\alpha)=0$ 且 $f'(\alpha)\neq 0$，那么 $\theta=\alpha$ 在原点处和 $r=f(\theta)$ 的图像相切。如果说该图像穿过原点多次的话，那么可能有多个满足条件的 α 存在。

- 几种经典的极坐标图形



极坐标下的面积和弧长

- 极坐标图像所夹面积

> 注意：在计算面积的时候，有的扇形部分会被重复扫过几次，因此存在面积重复计算的情况。那么我们就需要研究其几何图形，将总面积看作一个小的面积单元的几倍，然后首先计算小的面积单元的面积，乘上该单元的个数，求得总面积。此外，在计算的时候需要灵活的运用半倍角公式。

  - 设现有一个极坐标下的曲线，有 $r=f(\theta)$
  - 我们要求解从 $\theta=\alpha$ 到 $\theta=\beta$ 内，$r=f(\theta)$ 所包围的面积，且 $0\leq\beta-\alpha\leq 2\pi$
  - 面积微元是一个扇形，其夹角为 $d\theta$
  - 那么其弧长为 $rd\theta=f(\theta)d\theta$

    - 因为扇形的面积公式和三角形的面积公式相似，都是 `底*高*1/2` 。只不过三角形的底是一条直边，而扇形的底是弧边。其公式为

$$dS = \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

    - 那么该扇形的面积是

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

- 两极坐标图像交点
    - 将两个极坐标方程联立即可求解其交点
    - 代数方法不一定能一下子解出所有的交点，通过绘制几何图形能够看到更多的交点。这是因为有的交点并不是在同一时刻出现的。譬如 $(1, \pi)$ 和 $(-1, 0)$ 是同一个点，但是它们对应的是不同的 θ
    - 在计算两个曲线相夹的面积之前，我们需要首先计算交点。而对于交点的计算，不应该只利用代数方法联立计算，还需要通过绘制几何图像观察。在计算面积之前，也需要通过绘制几何图像观察哪条线在上，哪条线在下，处理的精细一点。
- 极坐标图像的弧长
    - 普通函数 $y = f(x)$ 弧长计算复习

$$s = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

    - 参数曲线 $x = f(t), y = g(t)$ 弧长计算复习

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$$

    - 极坐标图像弧长求解
        - 设现有 $r = f(\theta)$
        - 极坐标和直角坐标之间的关系回顾

$$x(\theta) = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$$
$$y(\theta) = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

        - 其实这里的 θ 可以看作是 t，根据之前的公式，我们有

$$x'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$
$$y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

        - 那么弧长微元公式如下

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2 d\theta} \\
&= \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2 d\theta} \\
&= \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2 d\theta}
\end{aligned}
$$

- 那么弧长公式如下
  设计算的是从 $\theta = \alpha$ 到 $\theta = \beta$ 的 $f(\theta)$ 弧长积分

$$
s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2 d\theta}
$$

- 极坐标下旋转体的表面积
  - 总体计算思想和前面还是一致的，是利用直角坐标系中的旋转体公式计算，然后将其变量替换为了关于 r 和 θ 的式子（如果 $r = f(\theta)$ 的话，最终的结果就只关于 θ）
  - 在极坐标下需要注意的是这里的圆盘半径不同。在直角坐标系下，如果是绕 x 轴旋转，那么圆盘的半径是 $f(x)$；而如果绕 y 轴旋转，那么圆盘的半径是 $g(y)$。而在极坐标系中，r 在 $\theta = 0$ 上的投影是 $r\cos\theta$，这也是绕 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时的圆盘半径；而 r 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 上的投影是 $r\sin\theta$，这也是绕 $\theta = 0$ 时的圆盘半径
  - 绕极坐标轴旋转（类似 x 轴）

$$
S = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\theta ds = 2\pi \int_\alpha^\beta f(\theta)\sin\theta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta
$$

  - 绕 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 旋转（类似 y 轴）

$$
S = 2\pi \int_\alpha^\beta r\cos\theta ds = 2\pi \int_\alpha^\beta f(\theta)\cos\theta \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta
$$

极坐标下的圆锥曲线和开普勒定律

> 这一节跳过

- 圆锥曲线的极坐标方程
- 理解和应用行星运动的开普勒定律

Chapter 11：向量和空间几何

> 想要知道点乘和叉乘公式是怎么来的？点击linear algebra - Origin of the dot and cross product? - Mathematics Stack Exchange

平面中的向量

- 向量和标量的差别：向量不止有大小，还有方向
- 向量的大小：$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2}$, 来源于距离公式
- 向量相等：大小相同，方向相同

- 单位向量：大小为 1 的向量
- 零向量：大小为 0 的向量
- 运算性质
  - 向量和=两向量各个分量相加
  - 向量差=两向量各个分量相减
  - 向量和标量的乘积=标量与向量中每个分量相乘
  - 向量取反=（-1）乘以向量中每个分量
- 几何特性：依据平行四边形定则
- 向量空间公理

  > **THEOREM 11.1 PROPERTIES OF VECTOR OPERATIONS**
  >
  > Let **u**, **v**, and **w** be vectors in the plane, and let c and d be scalars.
  >
  > 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Commutative Property
  > 2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ Associative Property
  > 3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ Additive Identity Property
  > 4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ Additive Inverse Property
  > 5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
  > 6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ Distributive Property
  > 7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ Distributive Property
  > 8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, 0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

- 求解一个向量方向上的单位向量：$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|v|}$
- 标准单位向量：$\vec{i} = (1, 0)$，$\vec{j} = (0, 1)$
- 用标准单位向量表示其他向量：$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$，这种写法称$\vec{v}$为$\vec{i}$和$\vec{j}$的线性组合，$\vec{i}$和$\vec{j}$为$\vec{v}$在水平和垂直方向上的分量
- 应用：
  - 力的合力与力的分解
  - 求合速度及合速度的分解

空间坐标系和空间中的向量

- 三维坐标系
- 三维坐标系两点之间的距离公式
- 三维坐标系中的向量：大部分公理和二维平面中的向量相同，此处不再重复
- 向量平行：两向量方向相同，大小相差一个标量的倍数，其中$\vec{u} = c\vec{v}$
- 应用：依然是力和速度

向量点乘（dot product/scalar product/inner product）

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$
- 点乘的性质：

THEOREM 11.4 PROPERTIES OF THE DOT PRODUCT

Let **u**, **v**, and **w** be vectors in the plane or in space and let c be a scalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ Commutative Property
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ Distributive Property
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

- 三角形夹角求解
  - 夹角公式推导
    - 余弦公式如下：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
    - 那么$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
    - 将该公式用向量表示，$a^2 = |\vec{v}_1|^2$，$b^2 = |\vec{v}_2|^2$，$c^2 = |\vec{v}_1 - \vec{v2}|^2$
    - 则该公式可表示如下：$|\vec{v}_1 - \vec{v2}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2|\vec{v}_1||\vec{v}_2|cosC$
    - 又因为$|\vec{v}_1 - \vec{v2}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$
    - 那么可以推导出：$|\vec{v}_1||\vec{v}_2|cosC = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$
    - 因此$\cos C = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$
  - 由夹角公式可以看到，由于$|\vec{v}_1||\vec{v}_2|$恒为正，因此$\cos C$的正负和$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$的正负恒相同
  - 此外，对于两个非零向量，当$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$时，$\cos C = 0$，两向量夹角为 90°
  - 正交向量：夹角为 90° 的两个向量称为正交向量
    - 向量之间：用`orthogonal`
    - 平面之间：用`perpendicular`
    - 向量和平面之间：用`normal`
- 方向角求解
  - 假设$\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$，这三个分量分别是$\vec{v}$在 x、y、z 轴上的投影
  - $\vec{v}$与$\vec{i}$之间：
    - $\vec{v}$在 x 轴上的投影是：v_1
    - 夹角的余弦值为：$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}|}$
  - $\vec{v}$与$\vec{j}$之间：
    - $\vec{v}$在 y 轴上的投影是：$\vec{v}_2$
    - 夹角的余弦值是：$\cos\beta = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}|}$
  - $\vec{v}$与$\vec{k}$之间：
    - $\vec{v}$在 z 轴上的投影是：$\vec{v}_3$
    - 夹角的余弦值是：$\cos\gamma = \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}|}$
  - $\vec{v}$方向上的单位向量$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}|}\vec{k}$
  - 该单位向量也可以写作：$\vec{u} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$

    - 此外，因为v_1, v_2, v_3是向量$\vec{v}$在 x、y、z 轴上的投影，因此可以得到关系式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- 投影和向量正交分解
    - 投影：要求解一个向量$\vec{u}$在另一个向量$\vec{v}$上的投影，我们需要以下几步：
        - 求解$\vec{u}$和$\vec{v}$之间的夹角的余弦$\cos\theta$
        - 投影的长度 = 投影向量的长度$|\vec{u}|$ * 夹角的余弦值$\cos\theta$
        - 投影的方向 = 向量$\vec{v}$方向上的单位向量，为$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
        - 因此向量$\vec{u}$在$\vec{v}$上的的投影为：投影的长度 * 投影的方向 = $(|\vec{u}|\cos\theta)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
        - 因为$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
        - 因此，投影的公式为$(|\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|})\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$
    - 正交向量
        - 和投影垂直的是该投影的正交向量，其可以用$\vec{u} - proj_v u$
- 力的分解：求解一个力的投影及正交
- 功的求解：功 = 力在某个位移方向上的投影**的长度** * 位移量
    - 使用投影 * 位移
    - 可以直接使用点乘
        - 可以直接使用点乘的原因是：功是一个标量，**其求解的是投影的长度 *位移量，而不是投影* 位移量。**
        - 在前面的推导中我们知道投影的长度为为$|\vec{u}|\cos\theta$，是在其后乘了一个单位向量才让它成为一个向量。
        - 位移是一个矢量，而位移量也是一个标量$|\vec{v}|$
        - 相乘的最后结果为$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$，也就是$\vec{u}\cdot\vec{v}$

向量叉乘

- 作用：求解一个垂直于多个向量的向量（至少 3 维空间），使用代数余子式计算
- 叉乘结果的方向：以$\vec{u}\times\vec{v}$为例，在右手系中，手掌从$\vec{u}$向$\vec{v}$弯曲，大拇指的方向就是叉乘结果的方向
- 叉乘的几个代数性质：

THEOREM 11.7 ALGEBRAIC PROPERTIES OF THE CROSS PRODUCT

Let **u**, **v**, and **w** be vectors in space, and let c be a scalar.

1. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$
2. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\times\mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$

- 第一条：依照叉乘向量的方向计算方法，等号左右两边的叉乘结果方向相反；也可以直接用代数式计算，得到与几何分析吻合的结果。
- 第二条：
  - 从代数（行列式）的角度分析：
    - 设$\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$，$\vec{w} =< w_1, w_2, w_3 >$，那么

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{bmatrix}$$

    - 根据行列式的性质（具体参考第 18 课 行列式及其性质_哔哩哔哩_bilibili），可得如下推导：

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

    - 因此，结论 2 成立
- 第五条：两个相同/平行的向量无法形成一个平面，因此无法得到关于它的垂直向量，因为只有一个向量；代数证明方法可以构造一个矩阵$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$，其后面两行完全相同，在计算行列式的值时，每个代数余子式的值都等于 0，因此最后的结果等于 0。
- 第六条：
  - **从代数（行列式）的角度分析：这个结果是怎么得到的 TODO**
  - **从几何的角度分析：这个结果是怎么得到的 TODO**

- 叉乘的几个几何性质

THEOREM 11.8 GEOMETRIC PROPERTIES OF THE CROSS PRODUCT

Let $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ be nonzero vectors in space, and let θ be the angle between $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is orthogonal to both $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$.
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \theta$
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ if and only if $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are scalar multiples of each other.
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| =$ area of parallelogram having $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ as adjacent sides.

- 第一条：根据方向计算方法可解
- 第二条：课本中提供了从右向左的证明方法，如下：

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \sin\theta &= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\sqrt{1-\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2}} \\
&= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2} \\
&= \sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2} \\
&= \sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2} \\
&= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|.
\end{aligned}
$$

- 第三条：根据第二条，当两向量平行时，$\sin\theta=0$，结果为 0
- 第四条：根据第二条，$|\vec{v}|\sin\theta$的值等于$\vec{v}$在$\vec{u}$上投影的正交向量的长度，也就是以$\vec{u}$和$\vec{v}$围起来的平行四边形的高，因为平行四边形的面积=底 * 高，因此叉乘向量的大小=平行四边形的面积；如果在这个基础上乘以$\frac{1}{2}$的话，得到的结果就是三角形的面积

- 叉乘的几个应用
  - 求平行四边形面积
  - 求力矩：$M=\vec{F}\times\vec{PQ}$
- triple scalar product（三维标量积？我也不知道该怎么翻译）
  - $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$
  - 计算方法如下：

THEOREM 11.9 THE TRIPLE SCALAR PRODUCT

For $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$, and $\mathbf{w}=w_1\mathbf{i}+w_2\mathbf{j}+w_3\mathbf{k}$, the triple scalar product is given by

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

  -
  - 计算方法解释：
    - $\vec{v}\times\vec{w}$的结果是$\det(A)\vec{i}+\det(B)\vec{j}+\det(C)\vec{k}$，此处det指的是三个代数余子式。让$\vec{u}$和这个式子点乘，结果也就是让$det(A)\cdot u_1+\det(B)\cdot u_2+\det(C)\cdot u_3$，那么其效果相当于把$u_1,u_2,u_3$放在叉乘矩阵的第一行
  - $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$
    - 原理
      - 对于$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$，$\vec{u}$ 的值在第一行，$\vec{v}$ 的值在第二行，$\vec{w}$ 的值在第三行
      - 核心为交换一行令行列式的值乘-1，交换两行令行列式的值不变
  - 应用：求以$\vec{u}$和$\vec{v}$为底，$\vec{w}$为斜边的平行六面体体积
    - 原理：平行四面体的体积 = 底面积 * 高
    - 底面积 = 底边两个向量的叉乘的大小，也就是$|\vec{u}\times\vec{v}|$
    - 高 = 斜边，在底面两个向量叉乘方向上的投影，也就是$|proj_{|\vec{u}\times\vec{v}|}\vec{w}|$，也就是$|\frac{\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})}{|\vec{u}\times\vec{v}|^2}(\vec{u}\times\vec{v})|$
    - 那么相乘以后就是$|\vec{u}\times\vec{v}||\frac{\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})}{|\vec{u}\times\vec{v}|^2}(\vec{u}\times\vec{v})|$，得到公式$\vec{w}(\vec{u}\times\vec{v})$
  - 引申结论：当且仅当三个向量共平面时，triple scalar product = 0

空间中的直线和平面

- 直线
  - 直线表示的两个要素：
    - 起始点：用一个坐标表示
    - 方向：用向量表示
  - 一条经过点$P(x_0, y_0, z_0)$，方向为$< a, b, c >$的直线，可以用参数方程表示（t 是参数）：
    - $x = x_0 + at$
    - $y = y_0 + bt$
    - $z = z_0 + ct$
  - 也可以该方程表示：$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$
- 平面
  - 平面表示的两个要素：
    - 平面中的一个点$P(x_1, y_1)$
    - 垂直于该平面的法向量$\vec{n} =< a, b, c >$
  - 平面表示的原理：
    - 平面中所有经过点 P 的直线都与法向量垂直，即$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0$
    - $[a, b, c] \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{bmatrix} = 0$
    - 由此得到平面公式为：$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
  - 平面公式（也叫标准形式）为：$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
  - 移向后得到通用形式为$ax + by + cz + d = 0$
  - 平面之间夹角余弦$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

  > 为什么这里取绝对值？是因为平面之间夹出来的是两个角，其中一个是直角/锐角，另一个是它的补角。我们取夹角为锐角，因此$\cos\theta >= 0$

    - 当$\cos\theta = 0$时，两平面垂直
  - 求解两平面相交线
    - 第一种方法：通过消元求解各个变量之间关系，最后改装为参数方程
    - 第二种方法（更好）：相交线实际与是两平面的法向量的叉乘同方向
- 在空间中绘制平面
  - 令 x/y/z=0，获取其与各个平面的相交线
- 点、线、面之间的距离
  - 点 和 点：距离公式
  - 点 和 线：
    - 假设求点$P(x_0, y_0, z_0)$到直线的距离，直线过一点$Q(x_1, y_1, z_1)$，方向向量$\vec{v}$为$< a, b, c >$
    - 公式推导 1

        - 向量$\vec{PQ} =< x_1 - x0, y_1 - y0, z_1 - z0 >$
        - ~~$\vec{PQ}$在方向向量上的投影为~~$proj_{\vec{v}}\vec{PQ} = \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$
        - ~~与投影垂直的正交向量为~~$\vec{PQ} - \frac{\vec{PQ}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$（这条路行不通，因为正交向量的长度我们不知道）
        - ~~直线方向向量$\vec{v}$与向量$\vec{PQ}$之间的夹角余弦的绝对值为：~~$\cos\theta = \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{v}|}{|\vec{PQ}|\cdot|\vec{v}|}$
        - ~~夹角的正弦值为~~$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$
        - ~~点 P 到直线的距离 =~~ $|\vec{PQ}|\sin\theta = |\vec{PQ}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\vec{PQ}|$（这种通过余弦求正弦的方法太复杂，能否直接求正弦呢？噢！叉乘！）
        - 距离$d = |\vec{PQ}|\sin\theta$
        - 因为$|\vec{v}\times\vec{PQ}| = |\vec{v}||\vec{PQ}|\sin\theta$
        - 因此$\sin\theta = \frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}||\vec{PQ}|}$
        - 因此距离$d = |\vec{PQ}|\sin\theta = |\vec{PQ}|\frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}||\vec{PQ}|} = \frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}|}$
    - ~~公式推导 2~~
        - 求解直线向量的法向量：这条路行不通，因为空间中一个向量的法向量有无数条
        - 求解过点 P，且方向向量为该法向量的直线
        - 求解该直线与原直线的交点 Q
        - 求解 PQ 的距离
    - **点到直线距离公式**：$d = |\vec{PQ}|\sin\theta = |\vec{PQ}|\frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}||\vec{PQ}|} = \frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}|}$
- 点 和 平面:
    - 点到平面的距离求解 -> 一条射线在法向量上的投影长度
    - 假设求点$P(x_0, y_0, z_0)$到平面的距离，平面过一点$Q(x_1, y_1, z_1)$，法向量$\vec{n}$为$< a, b, c >$
    - 推导过程
        - 向量$\vec{PQ} =< x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 >$
        - 投影的长度为$|proj_{\vec{n}}\vec{PQ}| = \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|^2}$
    - 公式：$d = |proj_{\vec{n}}\vec{PQ}| = \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|^2}$
- 线 和 线:
    - 平行：两线的方向向量平行
    - 相交：两线存在一公共点（可求解），无距离公式
    - 异面（如何判断？）即不平行也不相交
    - 两平行直线的距离
        - 推导：在第一条直线上找一点，求其到第二条直线的距离
            - 假设第一条直线过$P(x_0, y_0, z_0)$，方向为$\vec{v} =< a, b, c >$；第二条直线过$Q(x_1, y_1, z_1)$，方向与第一条直线相同
            - 那么$\vec{PQ} =< x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 >$

- 根据点到直线的距离公式，我们可以知道$d=\frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}|}$

  > 其实我感觉在向量里面推导到这一步就可以了，其他推导方法可以看这里：点到直线距离公式的几种推导 - 知乎 (zhihu.com)

- 公式：
  - 使用向量形式表达：$d=\frac{|\vec{v}\times\vec{PQ}|}{|\vec{v}|}$
  - 使用直线标准形式表达：$d=\frac{|c1-c2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- 两异面直线的距离公式（推导）：

  > 这个视频讲的非常清楚：Shortest distance between two skew lines in 3D space. (youtube.com)

  - 假设第一条直线过点$P(x_0,y_0,z_0)$，其方向$\vec{u}=(u_0,u_1,u_2)$
  - 第二条直线过点$Q(x_1,y_1,z_1)$，其方向$\vec{v}=(v_0,v_1,v_2)$
  - 那么第一条直线的参数方程形式为（t 为参数）：

$$
\begin{aligned}
x&=x_0+u_0t\\
y&=y_0+u_1t\\
z&=z_0+u_2t
\end{aligned}
$$

  - 第二条直线的参数方程形式为（s 为参数）：

$$
\begin{aligned}
x&=x_1+v_0s\\
y&=y_1+v_1s\\
z&=z_1+v_2s
\end{aligned}
$$

  - 异面直线的关键在于：设S_1S_2为两直线最短距离处，那么S_1S_2垂直于第一条直线，也垂直于第二条直线。设$S_1(x_0+u_0t,y_0+u_1t,z_0+u_2t)$，$S_2(x_1+v_0s,y_1+v_1s,z_1+v_2s)$，那么方程

$$
\begin{aligned}
\vec{S_0S_1}\cdot\vec{u}=0\\
\vec{S_0S_1}\cdot\vec{v}=0
\end{aligned}
$$

    有解，可以求出t和s的值，然后得到向量$\vec{S_0S_1}$
  - $d=|\vec{S_0S_1}|$
- 线 和 平面：求解线方向向量和平面法向量夹角
  - 平行：线和平面法向量垂直$\cos\theta=0$
  - 相交：线和平面法向量夹角不为 0 或+-1
  - 垂直：线和平面法向量同向$\cos\theta=1/-1$
  - 如果相交的话，线和平面的交线为：将直线参数方程带入平面方程求解得到坐标
- 平面 和 平面
  - 平行：两平面的法向量平行
  - 相交：两平面的法向量不平行

- 如果平行的话，两平面间的距离公式为：
  - 使用平面标准式，则距离为

$$d = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

  - 推导
    - 假设两平面的法向量为$\vec{n_1} = (a, b, c)$ - 平面一的方程为：$ax + by + cz + d1 = 0$ - 平面二的方程为：$ax + by + cz + d2 = 0$ - 假设现在有一条从平面一的$P(x_0, y_0, z_0)$发出的射线（P 点满足$ax_0 + by_0 + cz_0 + d1 = 0$），其方向与法向量平行，该直线的方程为（t 为参数）：

$$\begin{aligned} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{aligned}$$

- 假设点$Q(x_1, y_1, z_1)$为该直线和平面的交点，将其带入平面二的方程，可得如下结果：

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d2 = 0$$

- 通过移项可得：

$$(ax_0 + by_0 + cz_0 + d2) + (a^2t + b^2t + c^2t) = 0$$

- 那么 t 的值为：

$$t = \frac{-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

  - 又因为$ax_0 + by_0 + cz_0 + d1 = 0$，因此$ax_0 + by_0 + cz_0 = -d1$，那么$t$的式子可以改写为

$$t = \frac{d1 - d2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

  - 因此向量

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \\ &= (at, bt, ct) \\ &= (\frac{a(d1 - d2)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{b(d1 - d2)}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{c(d1 - d2)}{a^2 + b^2 + c^2}) \end{aligned}$$

  - 那么向量的长度（两平面间的距离）为

$$d = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)(d1-d2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(d1-d2)^2}{(a^2+b^2+c^2)}}$$

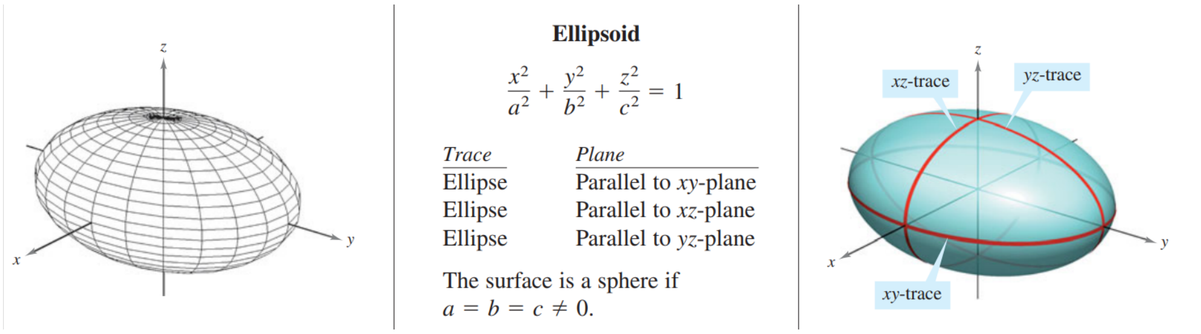
- 该等式可以化简为

$$d = \frac{|d1-d2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

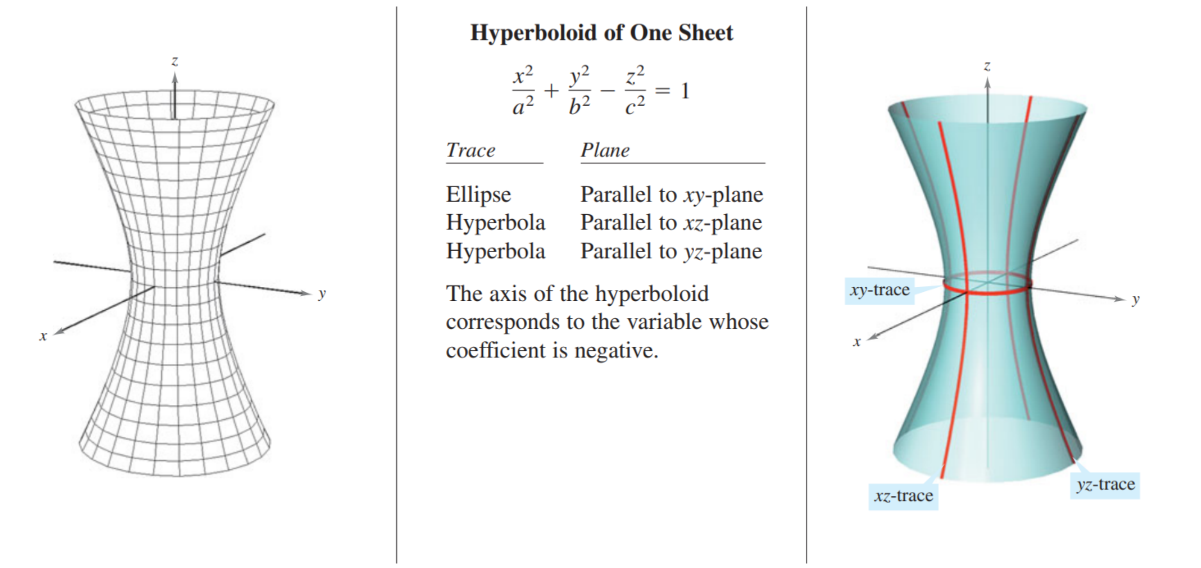
- 如果相交的话，两平面的交线为：交线的方向向量为两平面的法向量的叉乘（因为交线即垂直于第一个平面的法向量，又垂直于第二个平面的法向量，因此它的方向就是这两个法向量的叉乘）

空间中的曲面

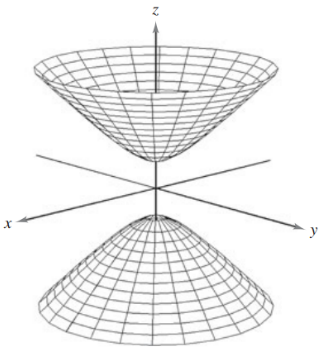
- 球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$
- 平面：$ax+by+cz+d=0$
- 圆柱：通常方程中只规定两个轴，汇成的曲线沿着没有规定的那个轴平移
- 二次曲面：$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$
  - 椭圆体（ellipsoid）



  - 单叶双曲面（hyperboloid of one sheet）



  - 双叶双曲面（hyperboloid of two sheets）

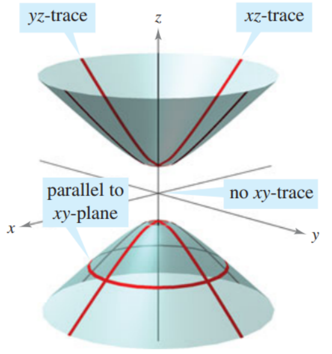


Hyperboloid of Two Sheets

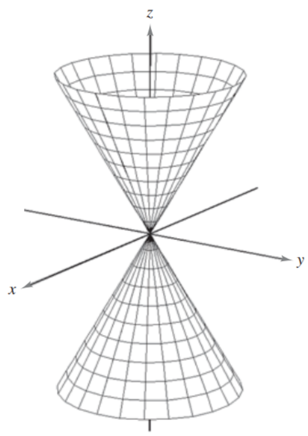
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Trace	*Plane*
Ellipse	Parallel to xy-plane
Hyperbola	Parallel to xz-plane
Hyperbola	Parallel to yz-plane

The axis of the hyperboloid corresponds to the variable whose coefficient is positive. There is no trace in the coordinate plane perpendicular to this axis.



- 椭圆锥面（elliptic cone）

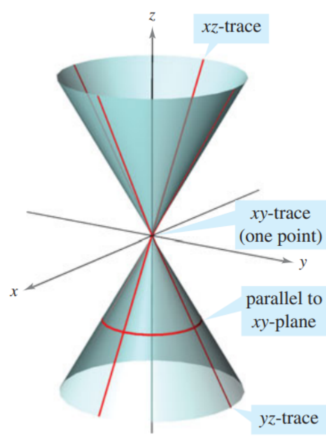


Elliptic Cone

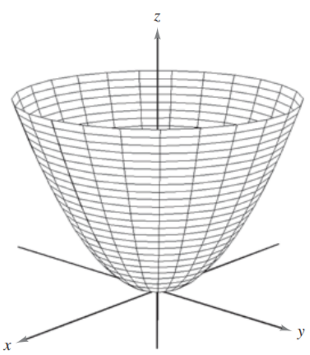
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Trace	*Plane*
Ellipse	Parallel to xy-plane
Hyperbola	Parallel to xz-plane
Hyperbola	Parallel to yz-plane

The axis of the cone corresponds to the variable whose coefficient is negative. The traces in the coordinate planes parallel to this axis are intersecting lines.



- 椭圆双曲面（elliptic paraboloid）

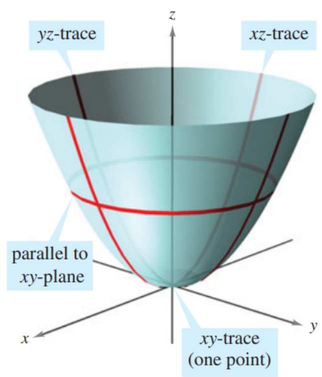


Elliptic Paraboloid

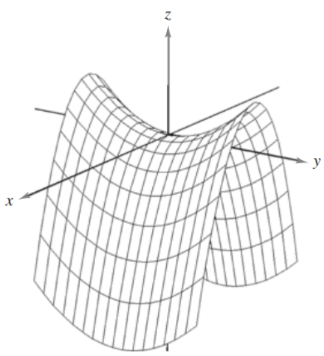
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Trace	*Plane*
Ellipse	Parallel to xy-plane
Parabola	Parallel to xz-plane
Parabola	Parallel to yz-plane

The axis of the paraboloid corresponds to the variable raised to the first power.



- 双曲抛物面（hyperbolic paraboloid）

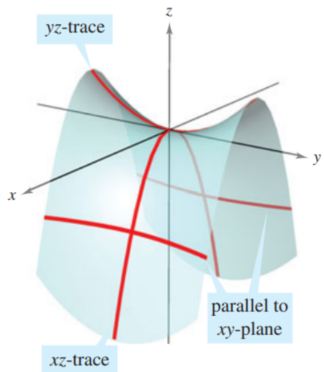


Hyperbolic Paraboloid

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Trace	*Plane*
Hyperbola	Parallel to xy-plane
Parabola	Parallel to xz-plane
Parabola	Parallel to yz-plane

The axis of the paraboloid corresponds to the variable raised to the first power.



- 旋转面

SURFACE OF REVOLUTION

If the graph of a radius function r is revolved about one of the coordinate axes, the equation of the resulting surface of revolution has one of the following forms.

1. Revolved about the x-axis: $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$

2. Revolved about the y-axis: $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$

3. Revolved about the z-axis: $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

其他三维空间建系方法及相关计算

- 圆柱坐标系（Cylindrical Coordinates）： x 和 y 轴用极坐标表示，z 轴用普通的直角坐标系表示

THE CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

In a **cylindrical coordinate system,** a point P in space is represented by an ordered triple (r, θ, z).

1. (r, θ) is a polar representation of the projection of P in the xy-plane.

2. z is the directed distance from (r, θ) to P.

  - 直角坐标系 -> 圆柱坐标系
    - $x = r\cos\theta$
    - $y = r\sin\theta$
    - $r = \sqrt{x^2+y^2}$
    - z 保持不变
  - 圆柱坐标系 -> 直角坐标系
    - $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
    - $\tan\theta = \frac{y}{x}$
    - z 保持不变
- 球系（Spherical Coordinates）
  - 坐标系定义

THE SPHERICAL COORDINATE SYSTEM

In a **spherical coordinate system,** a point P in space is represented by an ordered triple (ρ, θ, ϕ).

1. ρ is the distance between P and the origin, $\rho \geq 0$.

2. θ is the same angle used in cylindrical coordinates for $r \geq 0$.

3. ϕ is the angle *between* the positive z-axis and the line segment $\overrightarrow{OP}$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

Note that the first and third coordinates, ρ and ϕ, are nonnegative. ρ is the lowercase Greek letter *rho*, and ϕ is the lowercase Greek letter *phi*.

    - 设有一点$P(x,y,z)$，原点为$O(0,0,0)$，向量$\vec{O}P = (x,y,z)$

        - θ 是$\vec{OP}$在 xOy 平面上的投影与 x 轴之间的夹角
        - ϕ是$\vec{OP}$与 z 轴之间的夹角
    - 直角坐标系 -> 球系
        - $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
        - $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 或 $\tan\theta = \frac{y}{x}$
        - $\cos\phi = \frac{z}{\rho}$
    - 球系 -> 直角坐标系
        - 向量 $\vec{OP}$ 在 xOy 平面上的投影长度为$r = \rho\sin\phi$
        - $z = \rho\cos\phi$
        - $x = \rho\sin\phi\cos\theta$
        - $y = \rho\sin\phi\sin\theta$
- 圆柱坐标系 & 球系互转
    - 简单复习
        - 假设按照直角坐标系，存在一点$P(x,y,z)$，原点为$O(0,0,0)$，向量$\vec{OP} = (x,y,z)$
        - 圆柱坐标系
            - r 为向量 $\vec{OP}$ 在 xOy 上的投影长度
            - θ是投影与 x 轴的夹角
        - 球系
            - $\rho = |\vec{OP}|$
            - θ 是ρ 在 xOy 平面上的投影与 x 轴的夹角
            - ϕ 是ρ 与 z 轴之间的夹角
    - 圆柱坐标系 -> 球系
        - $\rho = \sqrt{r^2+z^2}$
        - θ 保持不变
        - $\cos\phi = \frac{z}{\rho}$
    - 球系 -> 圆柱坐标系
        - $r = \rho\sin\phi$
        - θ 保持不变
        - $z = \rho\cos\phi$

Chapter 12：向量函数

向量值函数

- 空间曲线和向量值函数

> 需要注意的是，这里的曲线**是一个轨迹**，其**横纵坐标都是关于时间 t 的函数**。可能存在曲线的方程相同，但是他们并不是同一个曲线。比如顺时钟一个周期的时间形成的圆，和逆时针一个时钟周期形成的圆。

    - 平面曲线定义：

    - 由一串点$(f(t), g(t))$定义而成，其中 t 为参数。
    - 横纵坐标 x 和 y 的参数方程如下：
    - $x = f(t)$
    - $y = g(t)$
    - 其中 t 为参数，f和g是**两个关于 t**的连续函数。三维空间中的曲线定义类似。
  - 由平面曲线定义可以引申到向量值函数
  - 向量值函数定义：
    - $r(\vec{t}) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$
    - 其中 t 为参数，f和g是**两个关于 t**的连续函数。三维空间中的曲线定义类似。
  - 平面曲线 -> 向量值函数：设置$f(t)$和$g(t)$，确定 t 的区间，用向量值函数定义 $r(\vec{t}) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$
  - 向量值函数 -> 平面曲线：消去 t
- 向量值函数的运算性质
  - 加/减：各个方向的函数分量分别加
  - 乘/除：各个方向的分量都乘/除
- 极限和连续
  - 极限的定义

    If $\mathbf{r}(t)$ approaches the vector $\mathbf{L}$ as $t \to a$, the length of the vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}$ approaches 0. That is,

    $$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| \to 0 \qquad \text{as} \qquad t \to a.$$

  - 极限的求解：对$r(\vec{t})$)极限的求解等同于对其各个分量函数极限的求解
  - 连续性的定义：$t \to a$时的极限的值=$r(\vec{a})$
  - 连续的向量函数的定义：该函数在定义域上各处都连续

向量值函数的微分和积分

- 微分

  > 注意：向量值函数本质上还是向量，只不过其中的每个分量都是一个关于 t 的函数。其符合向量的通用运算性质，只不过求解得到的结果是函数。只有把特定的 t 值带进去，才会得到一个实数解。

  - 定义

DEFINITION OF THE DERIVATIVE OF A VECTOR-VALUED FUNCTION

The **derivative of a vector-valued function r** is defined by

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

for all t for which the limit exists. If $\mathbf{r}'(t)$ exists, then $\mathbf{r}$ is **differentiable at** $\boldsymbol{t}$. If $\mathbf{r}'(t)$ exists for all t in an open interval I, then $\mathbf{r}$ is **differentiable on the interval** $\boldsymbol{I}$. Differentiability of vector-valued functions can be extended to closed intervals by considering one-sided limits.

其中，$r'(\vec{t})$ 在$r(\vec{t})$的切线方向，指向 t 增加的方向。

- 计算：对各个分量的函数求导（为什么？）
- 高阶微分计算：直接计算即可
- 连续性：导数在定义域上各点连续，而且在定义域上不存在导数为 0 的情况
- 微分性质及其应用

THEOREM 12.2 PROPERTIES OF THE DERIVATIVE

Let $\mathbf{r}$ and $\mathbf{u}$ be differentiable vector-valued functions of t, let w be a differentiable real-valued function of t, and let c be a scalar.

1. $D_t[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $D_t[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $D_t[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $D_t[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $D_t[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. If $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, then $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

- 第一条：用一个常数乘以向量，常数会和向量所有函数分量相乘，那么对结果求导，就是对函数分量求导。
- 第二条：两个向量相加，会将各自的函数分量相加。对相加后的结果求导，效果就等同与先对各个分量求导，然后再相加。
- 第三条（重点）：
  - 一个普通函数乘以一个向量，这个函数会和这个向量中的各个函数相乘。
  - 根据链式法则，对两个函数的乘积相乘，结果是：

$$(w(t)f(t))' = w'(t)f(t) + w(t)f'(t)$$

  - 那么原式如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(w(t)r(\vec{t})) &= \frac{d}{dt}w(t)(f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}) \\
&= \frac{d}{dt}(w(t)f(t)\vec{i}+w(t)g(t)\vec{j}) \\
&= \frac{d}{dt}(w(t)f(t))\vec{i}+\frac{d}{dt}(w(t)g(t))\vec{j} \\
&= (w'(t)f(t)+w(t)f'(t))\vec{i}+(w(t)g'(t)+w'(t)g(t))\vec{j} \\
&= (w'(t)f(t)\vec{i}+w'(t)g(t)\vec{j})+(w(t)f'(t)\vec{i}+w(t)g'(t)\vec{j}) \\
&= w'(t)r(\vec{t})+w(t)r'(\vec{t})
\end{aligned}
$$

- 第四条（重点）：
  - 两个向量值函数点乘，相当于各个分量分别相乘，最后相加
  - 对点乘的结果进行求导，就相当于对各个分量积求导
  - 推导如下:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(r(\vec{t})\cdot u(\vec{t})) \\
&= \frac{d}{dt}(f_1(t)\vec{i}+g_1(t)\vec{j})\cdot(f_2(t)\vec{i}+g_2(t)\vec{j}) \\
&= \frac{d}{dt}(f_1(t)f_2(t)\vec{i}+g_1(t)g_2(t)\vec{j}) \\
&= \frac{d}{dt}(f_1(t)f_2(t)\vec{i})+\frac{d}{dt}(g_1(t)g_2(t)\vec{j}) \\
&= (f_1'(t)f_2(t)+f_1(t)f_2'(t))\vec{i}+(g_1'(t)g_2(t)+g_1(t)g_2'(t))\vec{j} \\
&= (f_1'(t)f_2(t)\vec{i}+g_1'(t)g_2(t)\vec{j})+(f_1(t)f_2'(t)\vec{i}+g_1(t)g_2'(t)\vec{j}) \\
&=< f_1'(t),g_1'(t) > \cdot < f_2(t),g_2(t) > + < f_1(t),g_1(t) > \cdot < f_2'(t),g_2'(t) > \\
&= r'(\vec{t})u(\vec{t})+r(\vec{t})u'(\vec{t})
\end{aligned}
$$

- 第五条（重点）

> 注意：平面中的向量没有叉乘，只有空间中的向量才有叉乘。因为叉乘结果德方向垂直于两个向量构成的平面。

- 推导如下:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times\vec{u}(t)) \\
&= \frac{d}{dt}(< f*1(t),g*1(t),h*1(t) > \times < f*2(t),g*2(t),h*2(t) >) \\
&= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f*1(t) & g*1(t) & h*1(t) \\ f*2(t) & g*2(t) & h*2(t) \end{bmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}((g*1(t)h*2(t)-h*1(t)g*2(t))\vec{i}-(f*1(t)h*2(t)-h*1(t)f*2(t))\vec{j}+(f*1(t)g
\end{aligned}
$$

下面我们开始求导，由于式子太长，因此在后续的推导中我们将省略t，推导如下

$$
\begin{aligned}
&= (g_1h_2 - h_1g_2)'\vec{i} - (f_1h_2 - h_1f_2)'\vec{j} + (f_1g_2 - g_1f_2)'\vec{k} \\
&= (g_1'h_2 + g_1h_2' - h_1'g_2 - h_1g_2')\vec{i} - (f_1'h_2 + f_1h_2' - h_1'f_2 - h_1f_2')\vec{j} + (f_1'g_2 + f_1g_2' - g_1'f_2 - g \\
&= ((g_1'h_2 - h_1'g_2)\vec{i} - (f_1'h_2 - h_1'f_2)\vec{j} + (f_1'g_2 - g_1'f_2)\vec{k}) + ((g_1h_2' - h_1g_2')\vec{i} - (f_1h_2' - h_1f_2')\vec{j} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1' & g_1' & h_1' \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2' & g_2' & h_2' \end{vmatrix} \\
&= \vec{r}'(t) \times \vec{u}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{u}'(t)
\end{aligned}
$$

- 第六条（重点）：当向量值函数的参数不再是 简单的t，而是 $w(t)$ 时，对$f(w(t))$和$g(w(t))$的求导会遵循链式法则，分别得到$f'(w(t))w'(t)$和$g'(w(t))w'(t)$，得到的结果是 $f'(w(t))w'(t)\vec{i} + g'(w(t))w'(t)\vec{j}$，推导如下:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\vec{r}(w(t)) \\
&= \frac{d}{dt}(f(w(t))\vec{i} + g(w(t))\vec{j}) \\
&= \frac{d}{dt}(f(w(t)))\vec{i} + \frac{d}{dt}(g(w(t)))\vec{j} \\
&= f'(w(t))w'(t)\vec{i} + g'(w(t))w'(t)\vec{j} \\
&= w'(t)(f'(w(t))\vec{i} + g'(w(t))\vec{j}) \\
&= w'(t)\vec{r}'(w(t))
\end{aligned}
$$

- 第七条（重点）：依据第四条点乘公式，求导之后得到

$$2\vec{r} \cdot (t)\vec{r}'(t) = 0$$

那么很自然可得$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$

- 积分：对向量值函数德各个分量分别求定积分和不定积分。
  - 定积分：直接对各个函数分量求定积分即可
  - 不定积分 > 注意不定积分带带常数。 - 推导：假设$f(t)$，$g(t)$和$h(t)$的原函数分别是$F(t)$、$G(t)$ 和 $H(t)$，设向量$\vec{R}(t) = F(t)\vec{i} - G(t)\vec{j} + H(t)\vec{k}$，推导如下：

$$
\begin{aligned}
&\int \vec{r}(t) = \int f(t)\vec{i} - \int g(t)\vec{j} + \int h(t)\vec{k} \\
&= (F(t) + C*1)\vec{i} - (G(t) + C*2)\vec{j} + (H*t + C*3)\vec{k} \\
&= (F(t)\vec{i} - G(t)\vec{j} + H(t)\vec{k}) + (C*1\vec{i} - C*2\vec{j} + C\_3\vec{k}) \\
&= \vec{R}(t) + \vec{C}
\end{aligned}
$$

因此也可得$\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$

速度和加速度 & 斜抛运动

- 设现在存在一个物体
- t 时刻位置：$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
- 速度
  - 推导
    - 在初始阶段，该物体的位置为$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

- 在$\Delta(t)$ 时间后，该物体的位置为$\vec{r}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j}$
- 因此这段时间的位移量的变化用向量表示为$\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$
- 因为一段时间内的平均速度 = 位移量 / 时间长度，设平均速度为$\vec{v}$，那么

$$\vec{v}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- 那么要求解瞬时速度，我们需要让$\Delta t\to 0$，由此解得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- 该速度表达式也是我们前面提到的向量值函数的导数表达式$\vec{r}'(t)$，我们用向量替换掉$\vec{r}(t+\Delta t)$和$\vec{r}(t)$，再对其格式进行一下整理，可得

$$\begin{aligned}\vec{v}=\vec{r}'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j})-(x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j})}{\Delta t}\\&=\lim*\Delta t\to 0\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\vec{i}+\lim\_\Delta t\to 0\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\vec{j}\\&=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}\end{aligned}$$

- 那么该速度的大小为$|\vec{v}(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$

- 加速度
  - 我们可以看到物体瞬时速度的大小就是位移向量值函数的导数，那么加速度作为速度的变化量，可以推导出其值为速度向量值函数的导数
  - 公式：$\vec{a}=\vec{r}''(t)=\vec{v}'(t)=x''(t)\vec{i}+y''(t)\vec{j}$
- 位移、速度、加速度图像
  - 求公式 -> 带入值 -> 求特特定 t 下的向量 -> 绘制向量
- 初值问题
  - 通过多次不定积分求解原函数，通过带入值求解常数项
- 斜抛运动
  - 物理分析：垂直方向上的力为重力，水平方向上无作用力（不考虑空气阻力）
  - 情景假设：该物体以速度v_0抛出，抛出时速度与水平面夹角为θ，高度为 h，物体质量为 m，重力加速度为 g。下面分析该物体在 t 时刻的位移和速度。
  - 坐标系建立：x 轴向右，y 轴向上，那么起始的位移就是$\vec{r}(0)=h\vec{j}$，起始的速度为$\vec{v}(0)=v_0\cos\theta\vec{i}+v_0\sin\theta\vec{j}$，唯一的作用力是重力，其可以表示为$\vec{F}=-mg\vec{j}$
  - 目的：求解时刻t的速度 $\vec{v}(t)$ 和位移 $\vec{r}(t)$
  - 数学建模：
    - 因为加速度$a=-g\vec{j}$，因此速度$\vec{v}(t)=-gt\vec{j}+(C_1\vec{i}+C_2\vec{j})$
    - 因为 t=0 时，$\vec{v}(0)=v_0\cos\theta\vec{i}+v_0\sin\theta\vec{j}$
    - 因此，$C_1=v_0\cos\theta$，$C_2=v_0\sin\theta$，速度的公式为

$$\begin{aligned}\vec{v}(t)&=-gt\vec{j}+(v_0\cos\theta\vec{i}+v_0\sin\theta\vec{j})\\&=v_0\cos\theta\vec{i}+(v_0\sin\theta-gt)\vec{j}\end{aligned}$$

- 对速度向量值函数进行积分，解得位移公式为

$$\vec{x}(t) = v_0(\cos\theta)t\vec{i} + (v_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j} + (C_1\vec{i} + C_2\vec{j})$$

- 因为当 t=0 时，位移为：$\vec{r}(0) = h\vec{j}$，因此$C_1 = 0$，$C_2 = h$
- 因此位移公式为：

$$\vec{x}(t) = v_0(\cos\theta)t\vec{i} + (v_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j} + h\vec{j}$$
$$= v_0(\cos\theta)t\vec{i} + (v_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + h)\vec{j}$$

- 斜抛运动总结总结
  - 速度向量值函数

$$\vec{v}(t) = v_0\cos\theta\vec{i} + (v_0\sin\theta - gt)\vec{j}$$

  - 位移向量值函数

$$\vec{x}(t) = v_0(\cos\theta)t\vec{i} + (v_0(\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 + h)\vec{j}$$

切向量 & 法向量

- 单位切向量：方向与$\vec{r}'(t)$相同，表示如下（$\vec{r}'(t) \neq 0$）：

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- 切线求解
  - 假设曲线的向量值函数为 $\vec{r}(t)$，求解点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线
  - 因为切线的向量值函数为

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- 对于点 P，我们需要根据 x_0, y_0 和 z_0 求解出 t 的值，然后将其带入 $\vec{T}(t)$, 得到切线的向量
- 向量的三个值也就是经过点 P 的直线的方向向量，由此可以得出切线的参数方程
- 单位法向量
  - 推导
    - 在之前的结论里面我们知道，如果 $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c$，那么 $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$
    - 因为切向量 $\vec{T}(t)$ 为单位向量，因此 $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = |\vec{T}^2(t)| = 1$
    - 根据之前的结论 $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = c \rightarrow \vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$，因此可以看到切向向量及其微分向量方向是垂直的
    - 因为单位法向量和单位切向量垂直，因此我们推断单位切向量的微分就是单位法向量
- 单位法向量公式（$|\vec{T}'(t)| \neq 0$）

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

> 这里有两个问题：
> 1. 在什么情况下会出现 $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = c$ 的情况？
> 2. 为什么单位法向量不直接是 $\vec{T}'(t)$？

- 另一种寻找法向量的方法
  - 假设单位切向量 $\vec{T}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ （$|\vec{T}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = 1$），那么其单位法向量可以是
    - $\vec{N}(t) = y(t)\vec{i} - x(t)\vec{j}$，因为 $\vec{T}(t) \cdot \vec{N}(t) = x(t)y(t) - x(t)y(t) = 0$，满足两向量垂直，且 $\vec{N}(t)$ 为单位向量
    - $\vec{N}(t) = -y(t)\vec{i} + x(t)\vec{j}$，理由同上
- 加速度在水平 & 垂直方向上的分量
  - 物理意义
    - 对于以匀速行驶的物体
      - 速度和加速度的向量是垂直的（这个是根据前面那个定理，如果 $|\vec{r}'(t)|^2 = c$，那么 $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$，那么式子两边求导可得 $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) = 0$，也就是速度向量和加速度向量垂直）
    - 对于以变速行驶的物体
      - 速度和加速度向量不一定垂直，如斜抛运动，加速度一直向下，和运动轨迹无关
  - 加速度向量
    - 加速度向量 $\vec{a}(t)$ 在速度向量 $\vec{T}(t)$ 和速度法向量 $\vec{T}(t)$ 之间
    - 推导 1
      - 我们想要求解的是 $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = a_T\vec{T}(t) + a_N\vec{N}(t)$ 中的 a_T 和 a_N，其中 $\vec{T}(t)$ 和 $\vec{N}(t)$ 分别是和速度平行的单位向量和垂直于速度的单位向量
      - 设位移向量为 $\vec{r}(t)$
      - 那么速度的方向向量 $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$，其单位向量为 $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$
      - 对该式进行移向，得到 $\vec{v}(t) = \vec{T}(t)|\vec{v}(t)|$
      - 要得到 $\vec{v}'(t)$，需要对等式两端进行求导，得到 $\vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{T}(t)|\vec{v}(t)|)$
      - 因此 $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{T}'(t)|\vec{v}(t)| + \vec{T}(t)\frac{d}{dt}(|\vec{v}(t)|)$
      - 又因为 $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$
      - 移向可得 $\vec{T}'(t) = \vec{N}(t)|\vec{T}'(t)|$
      - 带入 $\vec{a}(t)$ 可得 $\vec{a}(t) = \vec{N}(t)|\vec{T}'(t)||\vec{v}(t)| + \vec{T}(t)\frac{d}{dt}(|\vec{v}(t)|)$
      - 那么 $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = a_T\vec{T}(t) + a_N\vec{N}(t)$ 中的 a_T 和 a_N 分别为

        $$a_T = \frac{d}{dt}(|\vec{v}(t)|)$$

        而

$$a_N=|\vec{T}'(t)||\vec{v}(t)|$$

  - 这两个值分别为加速度的切向和法向向量大小

- 推导 2

> 别记错投影公式！

  - 不从公式的角度运算，我们还可以这么理解。加速度的切向和法向分量，是加速度向量 $\vec{a}$ 在速度的切向 $\vec{T}$ 和法向 $\vec{N}$ 方向分量上的投影。
  - 依然假设位移向量为 $\vec{r}(t)$，那么速度向量为 $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$，加速度向量为 $\vec{a}(t)=\vec{v}'(t)=\vec{r}''(t)$
  - 而 $\vec{a}(t)=proj_{\vec{T}}\vec{a}\vec{T}+proj_{\vec{N}}\vec{a}\vec{N}$
  - 我们之前学过，一个向量 $\vec{u}$ 在另一个向量 $\vec{v}$ 上的投影的公式为

$$proj_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

  - 那么该投影的长度为

$$|proj_{\vec{v}}|\vec{u}=|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}|=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}|\vec{v}|=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

  - 那么由此我们可以得到，向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{T}$ 上的投影的大小为

$$a_T=|proj_{\vec{T}}\vec{a}|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{T}}{|\vec{T}|}=\vec{a}\cdot\vec{T}$$

  - 以此类推，向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{N}$ 上的投影的大小为

$$a_N=|proj_{\vec{N}}\vec{a}|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|}=\vec{a}\cdot\vec{N}$$

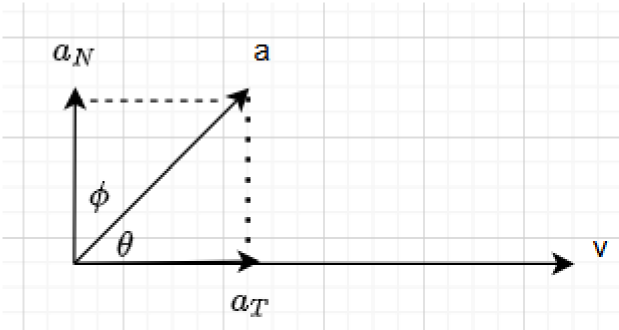
    - 因为 $\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$，因此 a_T 还可以写成

$$a_T=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

    - ~~因为~~ $\cancel{\vec{N}=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}}$~~，因此~~ $\cancel{a_N}$ ~~还可以写成~~（这种方法解不出来）

$$a_N=\frac{\vec{T}'(t)\cdot\vec{a}}{|\vec{T}'(t)|}$$

  - 我们现在来看一下几个向量之间的几何关系（设向量 $\vec{T}$ 和向量 $\vec{a}$ 之间的夹角为 θ，向量 $\vec{a}$ 和向量 a_N 之间的夹角为 ϕ）



- 根据上述图像，可得如下关系式：

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = |\vec{a}||\vec{N}| \cos \phi$$

- 在上述式子中，$|\vec{a}|| \cos \phi| = a_N$
- 而根据几何关系我们还可以看出，$a_N = |\vec{a}| \sin \theta$
- 因此 $\vec{a} \cdot \vec{N} = |\vec{N}||\vec{a}| \sin \theta$
- 因为

$$|\vec{N}| = |\vec{T}| = 1$$

- 因此，$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = |\vec{T}||\vec{a}| \sin \theta = |\vec{a} \times \vec{T}|$
- 又因 $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
- 因此原式等于

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = |\vec{T}||\vec{a}| \sin \theta = |\vec{a} \times \vec{T}| = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|}$$

- 公式总结
  - 速度方向上的加速度分量

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

  - 速度法向量方向上的加速度分量

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|} = \sqrt{\vec{a}^2 - a_T^2}$$

弧长和曲率

- 弧长
  - 单变量函数弧长求解复习
    - 在对向量值函数求解弧长之前，我们先复习一下对单变量函数求解弧长的过程
    - 设一单变量函数为 $y = f(x)$，那么一段弧长的计算公式是

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

    - 从中提取出 Δx，可以得到

$$\Delta s=\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\Delta x$$

- 将 Δ 改为微元，可得

$$ds=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$$

- 将 s 视作关于 x 的函数，y 视作关于 x 的函数，那么其可写作如下形式

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx$$

- 要求解弧长 s，我们对该式关于 x 进行积分，可得如下结果

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$$

- 向量值函数的弧长求解推导
  - 求解一段向量值函数的弧长的方法是，对该弧长的每一小段进行求解，然后在 t 的范围内对其求定积分
  - 设 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$
  - 那么这个曲线在 Δt 内的一小段弧长为 $\Delta r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$
  - 将 Δ 修改为微元，可得 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$
  - 对右边提取出一个 dt，可得

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}dt$$

  - 该式可以表达如下

$$s=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt$$

  - 根据之前的内容，我们知道

$$\vec{r}'(t)=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$

  - 那么

$$s=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt=\int_a^b|\vec{r}'(t)|dt$$

- 还可以这么理解：$\vec{r}(t)$ 是物体经过的路径，$\vec{v}(t)=|\vec{r}'(t)|$ 是物体在 t 时刻的瞬时速度，在一段时间（t=a 到 t=b 时刻）内对速度进行积分，就可以得到位移的量，这就是 $L=\int_a^b\vec{r}'(t)dt$
- 弧长函数
  - 当 t 不是一个定值，而是一个变量时，从 a 到 t 时刻的弧长定义如下：

$$s(t)=\int_a^t|\vec{r}'(t)|dt$$

- 这个 $s(t)$ 就是 arc length parameter
- 根据微积分第一定律：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=f(x)$$

- 那么

$$\frac{d}{dt}\int_a^t|r'(u)|du=|r'(t)|$$

- 需要注意的是，这里的 $s(t)$ 是指的路程，而不是位移。因此该值总是为正。

- 弧长参数 s

> 这一段我在理解上废了功夫，其中这个
> - calculus - How do you determine whether a curve uses arc length as a parameter? - Mathematics Stack Exchange 问题下的回答
> - 这个 12.5 The Arc Length Parameter and Curvature‣ Chapter 12 Vector Valued Functions ‣ Calculus III (und.edu) 讲义
> - Parametrize a Curve with Respect to Arc Length (youtube.com) 还有这个视频给了我很大的启发。

- 定义
  - 首先我们需要思考，为什么需要弧长参数 s？这里可以有两种定义轨迹曲线位移的方式：
    - 用时刻 t 来定义位移：比如我们想知道 t=1 时，坐标在哪里？
    - 用弧长 s 来定义位移：比如我们想知道 s=1 时，坐标在哪里？这个用来标记位置的弧长参数 s 就是我们要寻找的目标
- 求解
  - 根据前文我们可知

$$s(t)=\int_a^t|\vec{r}'(t)|dt$$

  我们便可以计算出 $s(t)$ 的关系式，将 $t=g(s)$ （g 为 s 的反函数）带入 $\vec{r}(t)$，便可得到 $\vec{r}(s)$
- 推导
  - 因为

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$$

  - 利用导数替换掉分式可得：

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'(s)s'(t)$$

- 通过移向可得

$$\vec{r}'(s) = \frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)}$$

- 又因为

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = |\vec{r}'(t)|$$

- 可得

$$\vec{r}'(s) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- 这个值我们是见过的，他就是 $\vec{T}(t)$，也就是速度方向上的单位向量
- $\vec{r}'(s)$ 与 $\vec{r}'(t)$ 不同的是，$|\vec{r}'(s)| = 1$，是个单位向量
- 如果要使 t 为弧长参数，当且仅当在 $|\vec{r}'(t)| = 1$ 的情况下才能实现，也就是说 $s = t$；同理，当 $|\vec{r}'(t)| = 1$ 时，t 为单位向量

- 含义
  - 在前文我们提到过，$\vec{r}(t)$ 相当于位移
  - $|\vec{r}'(t)|$ 相当于 t 时刻速度的大小
  - $\vec{T}(t)$ 是速度方向上的单位向量，也是 $\vec{r}'(s)$，当且仅当 $|\vec{r}'(s)| = 1$ 时 s 为弧长参数
- 结论

THEOREM 12.7 ARC LENGTH PARAMETER

If C is a smooth curve given by

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{or} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

where s is the arc length parameter, then

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = 1.$$

Moreover, if t is *any* parameter for the vector-valued function $\mathbf{r}$ such that $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, then t must be the arc length parameter.

- 弧长参数的应用 -> 曲率

> 曲率的学习也可以参考这里：
> - Curvature intuition (youtube.com)
> - Curvature formula, part 1 (youtube.com)
> - Curvature formula, part 2 (youtube.com)
> - Curvature formula, part 3 (youtube.com)
> - 12.5 The Arc Length Parameter and Curvature‣ Chapter 12 Vector Valued Functions ‣ Calculus III (und.edu)

- 定义 & 推导
  - 曲率是用来衡量曲线的弯曲程度的变量，弯曲越狠，曲率越大 -> 可以这样翻译：在同样的弧长内，单位速度向量的变化越大，曲率越大
  - 那么我们这样定义曲率

$$K=|\frac{d\vec{T}}{ds}|=|\vec{T}'(s)|$$

  - 如果 $\vec{r}(s)$ 是以 s 作为弧长参数，那么存在如下式子：

$$\vec{T}(s)=\frac{\vec{r}'(s)}{|\vec{r}'(s)|}$$

  - 我们换一种方法写 K:

$$\begin{aligned} K&=|\frac{d\vec{T}}{ds}| \\ &=|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}| \\ &=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|s'(t)|} \end{aligned}$$

  - 根据前文我们知道

$$|s'(t)|=|\vec{r}'(t)|$$

  - 因此原式可改写如下

$$K=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|s'(t)|}=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$$

  - 因为

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

  - 移向后可得

$$\vec{r}'(t)=\vec{T}(t)|\vec{r}'(t)|$$

  - 对等式两边求导可得

$$\vec{r}''(t)=\vec{T}'(t)|\vec{r}'(t)|+\vec{T}(t)|\vec{r}''(t)|$$

  - 下面我们要做的是将 $|\vec{T}'(t)|$ 的形式给凑出来

$$\begin{aligned} &\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) \\ &=(\vec{T}(t)|\vec{r}'(t)|)\times(\vec{T}'(t)|\vec{r}'(t)|+\vec{T}(t)|\vec{r}''(t)|) \\ &=\vec{T}(t)|\vec{r}'(t)|\times\vec{T}'(t)|\vec{r}'(t)|+\vec{T}(t)|\vec{r}'(t)|\times\vec{T}(t)|\vec{r}''(t)| \end{aligned}$$

- 根据叉乘的性质（因为一个向量构不成一个平面，因此不存在其叉乘结果，代数上也可以推导出这个性质。因为当一个行列式的两行都相同时，最后所有的代数余子式都为 0）

$$\vec{T}(t) \times \vec{T}(t) = 0$$

- 原式可以改写为

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \vec{T}(t)|\vec{r}'(t)| \times \vec{T}'(t)|\vec{r}'(t)| = (\vec{T}(t) \times \vec{T}'(t))|\vec{r}'(t)|^2$$

- 那么

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = |\vec{T}(t) \times \vec{T}'(t)||\vec{r}'(t)|^2$$

- 根据叉乘的值的性质我们知道

$$|\vec{T}(t) \times \vec{T}'(t)| = |\vec{T}(t)||\vec{T}'(t)| \sin\theta$$

- 因为 $\vec{T}(t)$ 是曲线切线方向（速度方向）上的单位向量，因此 $|\vec{T}(t)| = 1$，由此 $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = 1$，对两边求导可得 $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$
- 也就是说 $\vec{T}(t)$ 和 $\vec{T}'(t)$ 垂直。那么 $\sin\theta = 1$。因此 $|\vec{T}(t) \times \vec{T}'(t)| = |\vec{T}(t)||\vec{T}'(t)| \sin\theta = |\vec{T}(t)||\vec{T}'(t)| = |\vec{T}'(t)|$ （因为 $\vec{T}(t)$ 是单位向量，长度为 1）
- 因此原式可改写为

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = |\vec{T}'(t)||\vec{r}'(t)|^2$$

- 那么我们可以得到用 $\vec{r}(t)$ 及其相关导数表示的 $|\vec{T}'(t)|$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^2}$$

- 因此曲率公式可改写为

$$\begin{aligned} K = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|s'(t)|} = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} \\ = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)||\vec{r}'(t)|^2} \\ = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} \end{aligned}$$

- 一般函数 $y = f(x)$ 的曲率公式
  - 设函数为 $y = f(x)$
  - 该函数用位移 $\vec{r}(x)$ 表示如下

> 该函数用向量这样表示是因为，对于一般的向量值函数 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$，x、y 和 z 是关于 t 的函数。而在 $y = f(x)$ 中，这三项是关于 x 的函数，$x = x$，$y = f(x)$，$z = 0 * x$。

$$\vec{r}(x)=x\vec{i}+y\vec{j}$$

- 对 $\vec{r}(x)$ 求导得到

$$\vec{r}'(x)=\vec{i}+y'\vec{j}$$

- 对 $\vec{r}'(x)$ 求导得到

$$\vec{r}''(x)=y''\vec{j}$$

- 那么按照同样的方式定义曲率 （斜率的变化量/弧长）

$$K=|\frac{d\vec{T}}{ds}|=\frac{|\vec{r}'(x)\times\vec{r}''(x)|}{|\vec{r}'(x)|^3}$$

- $\vec{r}'(x)\times\vec{r}''(x)$ 的叉乘行列式如下：

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & y' & 0\\ 0 & y'' & 0\end{vmatrix}$$

- 该行列式的计算结果为

$$|\vec{r}'(x)\times\vec{r}''(x)|=|y''\vec{k}|=|y''|$$

- 那么曲率的结果为

$$K=|\frac{d\vec{T}}{ds}|=\frac{|y''|}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

- 公式总结
  - 向量值函数的曲率公式

$$\begin{aligned}K&=|\frac{d\vec{T}}{ds}|=|\vec{T}'(s)|\\&=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|s'(t)|}=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}\\&=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}\end{aligned}$$

  - 一般函数的曲率公式

$$K=|\frac{d\vec{T}}{ds}|=\frac{|y''|}{(\sqrt{1+(y')^2})^3}$$

- 应用：速度，曲率与加速度的关系
  - 加速度的切向分量：速度的变化率 -> 弧长的变化率
  - 加速度的法向分量：是速度和曲率的函数

THEOREM 12.10 ACCELERATION, SPEED, AND CURVATURE

If $\mathbf{r}(t)$ is the position vector for a smooth curve C, then the acceleration vector is given by

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

where K is the curvature of C and ds/dt is the speed.

- 推导：如何用速度和曲率表示加速度
  - a_T 推导如下

$$a_T = \frac{d}{dt}(|\vec{v}(t)|)$$

  - a_N 推导如下

$$\begin{aligned} a_N &= \vec{a}\cdot\vec{N} = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|} = \sqrt{\vec{a}^2 - a_T^2} \\ &= \frac{ds}{dt}(|\vec{v}|K) \\ &= K(\frac{ds}{dt})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N} \\ &= D_t[\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}(\|\mathbf{v}\|K)\mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}. \end{aligned}$$

总结

SUMMARY OF VELOCITY, ACCELERATION, AND CURVATURE

Let C be a curve (in the plane or in space) given by the position function

	$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$	Curve in the plane
	$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$	Curve in space
Velocity vector, speed, and acceleration vector:	$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$	Velocity vector
	$\lVert\mathbf{v}(t)\rVert = \dfrac{ds}{dt} = \lVert\mathbf{r}'(t)\rVert$	Speed
	$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t)$	Acceleration vector
Unit tangent vector and principal unit normal vector:	$\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert}$ and $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\lVert\mathbf{T}'(t)\rVert}$	
Components of acceleration:	$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\lVert\mathbf{v}\rVert} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$	
	$a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \dfrac{\lVert\mathbf{v}\times\mathbf{a}\rVert}{\lVert\mathbf{v}\rVert} = \sqrt{\lVert\mathbf{a}\rVert^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = K\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$	
Formulas for curvature in the plane:	$K = \dfrac{\lvert y''\rvert}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$	C given by $y = f(x)$
	$K = \dfrac{\lvert x'y'' - y'x''\rvert}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$	C given by $x = x(t)$, $y = y(t)$
Formulas for curvature in the plane or in space:	$K = \lVert\mathbf{T}'(s)\rVert = \lVert\mathbf{r}''(s)\rVert$	s is arc length parameter.
	$K = \dfrac{\lVert\mathbf{T}'(t)\rVert}{\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert} = \dfrac{\lVert\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\rVert}{\lVert\mathbf{r}'(t)\rVert^3}$	t is general parameter.
	$K = \dfrac{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{N}(t)}{\lVert\mathbf{v}(t)\rVert^2}$	

Cross product formulas apply only to curves in space.

Chapter 13：多变量函数

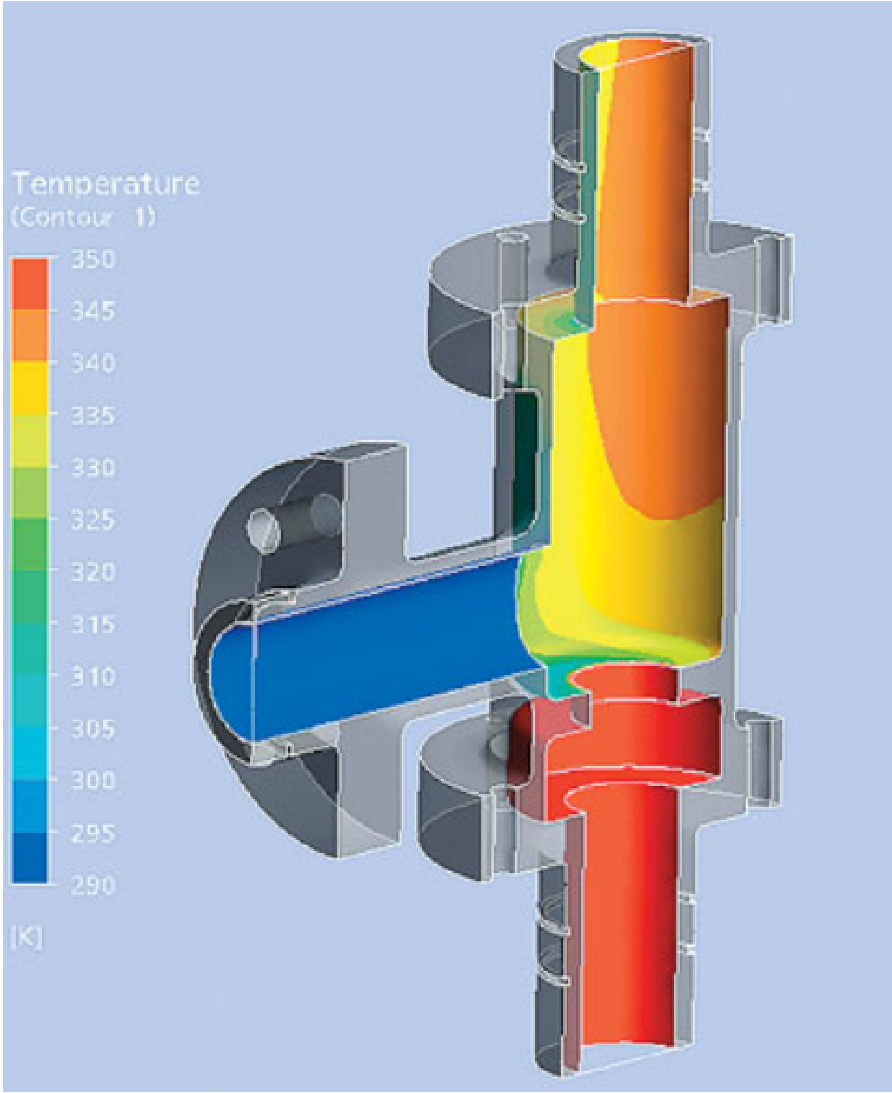
多变量函数简介

- 多变量函数介绍

  > **DEFINITION OF A FUNCTION OF TWO VARIABLES**
  >
  > Let D be a set of ordered pairs of real numbers. If to each ordered pair (x, y) in D there corresponds a unique real number $f(x, y)$, then f is called a **function of x and y.** The set D is the **domain** of f, and the corresponding set of values for $f(x, y)$ is the **range** of f.

  其中，多变量函数的定义域和值域、四则运算规则、复合运算规则，多项式函数、有理函数等都和但变量函数中的规则相同。
- 多变量函数图像
  - 确定定义域，值域
  - 假设函数为 $f(x,y)$， 令 $z = f(x,y)$，然后绘制不同 z 下的曲线图，综合起来就是函数图像
- Level Curve（针对 2 变量函数）
  - 假设函数为 $z = f(x,y)$，令 z 等于不同的 c（也就是令 $f(x,y)$ 等于不同的常数），可以绘制出不同常数下的曲线

    - 这种方法常用于在地理上绘制等高线
    - 称其为 Level Curve 是因为设定函数值为常数时，绘制出的是关于 x 和 y 的曲线
- Level Surface（针对 3 变量函数）
    - 加设函数为 $f(x,y,z)$，令 $f(x,y,z)$ 等于不同的常数 c，即可绘制出 Level Surface
    - 这种方法常用于工业中用不同颜色来表示不同温度下的曲面



One-way coupling of ANSYS CFX™ and ANSYS Mechanical™ for thermal stress analysis
Figure 13.15

    - 称其为 Level Curve 是因为设定函数值为常数时，绘制出的是关于 x、y 和 z 的曲面
- 计算机绘制的立体图像

极限和连续

- 平面中相邻点的定义
    - 回顾空间中两点之间的距离函数：$d = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$
    - 设空间中 $\delta-$ 相邻的概念为：以 (x_0, y_0) 为圆心的以 δ 为半径的圆（$\delta > 0$）内的点。用数学语言表示为一个集合，该集合满足 $\{(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \delta}\}$
    - `open disk`：公式中为 $<$

    - `closed disk`：公式中为 $\leq$
    - 内部点：内部点的 δ 半径内，所有点都在 R 区域内
    - 边界点：边界点 δ 半径内，部分点在 R 区域里面，部分点在 R 区域外面
    - 开区间：所有点都是内部点
    - 闭区间：存在完整的边界
- 2 变量函数的极限定义
    - 单变量函数极限回顾
        - 在函数 $y = f(x)$ 中，对于坐标 (x_0, y_0)，对于任意的 $\epsilon > 0$，总存在对应的 δ，使得对于任意的 $0 < |x - x_0| < \delta$，总有 $|y_0 - L| < \epsilon$；我们称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的极限为 L
    - 定义
        - 在函数 $f(x, y)$ 中，对于坐标 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$；对于任意的 $\epsilon > 0$，总存在对应的 δ，使得对于任意 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$，总有 $|f(x_0, y_0) - L| < \epsilon$；我们称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的极限为 L
        - 符号表示为

$$\lim (x, y) \to (x_0, y_0) f(x, y) = L$$

    - 单/多变量函数对比
        - 坐标中的元素个数：2->3
        - 两点之间距离的定义变化了：$0 < |x - x_0| < \delta$ -> $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$
        - 极限的下标由 $x \to x_0$ 转变为 $(x, y) \to (x_0, y_0)$，从而导致对于 $\to$ 符号含义的变化
            - 对于单变量求极限，只需要考虑左极限和右极限；两极限相等，则极限存在
            - **对于多变量函数求极限，对于任意方向趋近，极限值都必须相等，否则极限不存在**
    - 证明极限：从 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 推导到 $|f(x_0, y_0) - L| < \epsilon$，令 δ 等于关于 ϵ 的某个值，证明极限存在（要点：函数的放缩，涉及到不等式的问题）
        - 案例 1

Show that

$$\lim_{(x,\, y)\to(a,\, b)} x = a.$$

Solution Let $f(x, y) = x$ and $L = a$. You need to show that for each $\varepsilon > 0$, there exists a δ-neighborhood about (a, b) such that

$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

whenever $(x, y) \neq (a, b)$ lies in the neighborhood. You can first observe that from

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

it follows that

$$\begin{aligned} |f(x, y) - a| &= |x - a| \\ &= \sqrt{(x-a)^2} \\ &\leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

So, you can choose $\delta = \varepsilon$, and the limit is verified. ■

- 案例 2

EXAMPLE 3 Verifying a Limit

Evaluate $\displaystyle\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$.

Solution In this case, the limits of the numerator and of the denominator are both 0, and so you cannot determine the existence (or nonexistence) of a limit by taking the limits of the numerator and denominator separately and then dividing. However, from the graph of f in Figure 13.21, it seems reasonable that the limit might be 0. So, you can try applying the definition to $L = 0$. First, note that

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{and} \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Then, in a δ-neighborhood about $(0, 0)$, you have $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, and it follows that, for $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left|\frac{5x^2y}{x^2 + y^2}\right| \\ &= 5|y|\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) \\ &\leq 5|y| \\ &\leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \\ &< 5\delta. \end{aligned}$$

So, you can choose $\delta = \varepsilon/5$ and conclude that

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$ ■

- 极限的求解：像单变量一样，直接带入/因式分解/有理化
- 极限存在性

- 肉眼观察法：如 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$ 显然不存在，因为 x^2+y^2 无限趋近于 0，那么这个值无限趋近于无穷大
- 探测当从各个方向趋近时，极限是否都相同。例如设置 $y=kx$，将其带入极限的求解公式（k 可以是不同的常数）。若求得的极限结果与 k 相关，那么表明从各个方向趋近时（k 不同），极限不同。那么极限不存在，否则极限存在。

- 2 变量函数的连续性定义
  - 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续
    - $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$
  - 函数 $f(x,y)$ 连续：函数在开区间上任何点都连续，则该函数在开区间上为连续函数
  - 连续多变量函数在 (x_0,y_0) 点的四则运算：用标量乘、函数相乘、加减除，(x_0,y_0) 处依然保持连续
  - 复合函数连续：两复合函数在 (x_0,y_0) 处连续，将其复合后在该点依然保持连续
  - 连续性测试：需要找到不连续的地方（根据函数定义域）
- 3 变量函数的连续性定义
  - 相比两变量函数的变化：邻域点的定义发生了变化，但是依然采用距离公式，内部点和区间的定义也因此做了一些微小的调整，此时邻域为一个球形。其他的定义和定理都和 2 变量情况下类似，此处不再赘述

偏导

- 2 变量函数的偏导定义 & 计算
  - 偏导的含义：函数值随单个自变量变化的量度

DEFINITION OF PARTIAL DERIVATIVES OF A FUNCTION OF TWO VARIABLES

If $z = f(x, y)$, then the **first partial derivatives** of f with respect to x and y are the functions f_x and f_y defined by

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

provided the limits exist.

  - 偏导的求解：把其他自变量当作常数，求解函数值对特定自变量（你想要分析的自变量）的导数
  - 偏导的符号表示

NOTATION FOR FIRST PARTIAL DERIVATIVES

For $z = f(x, y)$, the partial derivatives f_x and f_y are denoted by

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

The first partials evaluated at the point (a, b) are denoted by

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a, b)} = f_x(a, b) \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a, b)} = f_y(a, b).$$

- 偏导的几何意义
  - 假设函数为 $z = f(x, y)$（该函数形成的是一个三维空间中的曲面）
  - 当 $y = y_0$ 时，函数 $z = f(x, y_0)$ 为 $z = f(x, y)$ 和平面 $y = y_0$ 的交线。对 $z = f(x, y_0)$ 求 x 偏导

$$z_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

  - 当 $x = x_0$ 时，函数 $z = f(x_0, y)$ 为 $z = f(x, y)$ 和平面 $x = x_0$ 的交线。对 $z = f(x_0, y)$ 求 y 偏导

$$z_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

  - 总结：$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 分别为函数 f 在 y 和 x 固定时，x 和 y 方向上曲线的斜率
  - 某点 (x_0, y_0) 处的偏导计算：直接带入值即可
- 偏导的其他应用：求解函数相对于某一自变量的变化率
- 3 变量及更多变量函数的偏导定义 & 计算：和前面两个变量的类似，此处不再赘述
- 2 或 3 变量函数的高阶偏导

> 最后两种也叫 `mixed partial derivative`，其中，如果 f_{xy} 和 f_{yx} 是开区间 R 上的连续函数，那么对于 R 上的所有 (x, y)，都有 $f_{xy} = f_{yx}$。对于 3 个变量及以上的函数，该性质仍然成立。

Show that $f_{xz} = f_{zx}$ and $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ for the function given by

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z.$$

Solution

First partials:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \qquad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Second partials (note that the first two are equal):

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

Third partials (note that all three are equal):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zxz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}$$

1. Differentiate twice with respect to x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

2. Differentiate twice with respect to y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

3. Differentiate first with respect to x and then with respect to y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

4. Differentiate first with respect to y and then with respect to x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

-

微分

- 单变量函数的增量和微分复习
  - 增量：$f(x+\Delta x) - f(x)$
  - 微分：$dy = f'(x)dx$
- 增量和微分的概念 & 两变量函数的微分定义
  - 设函数为 $z = f(x,y)$，x 的增量为 Δx，y 的增量为 Δy
  - 那么 z 的增量为 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$
  - x 的微分为 dx，y 的微分为 dy
  - 全微分的定义如下

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

  - 全微分公式拓展

        - 对于有多个变量的全微分，其值等于函数对各个自变量的偏导 * 该自变量的微分的和
        - 例如对于函数 $z=f(x,y,u,w)$，其全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial w}dw$$

- 是否可微判断

> 注意多变量函数可微的条件和单变量函数不相同，对于单变量函数，只需要其导数存在即可。而对于多变量函数，f_x 和 f_y 都存在不一定证明其可微。因为在那个点有可能根本就不可导。

    - 初步判断

    > 三元函数的微分形式与可微判断与二元函数类似，此处不再赘述。

        - 在某个点可微：设函数为 Δz，判断该 Δz 是否能写成 $f_x\Delta x+f_y\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$，且当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时，ϵ_1 和 ϵ_2 趋近于 0
        - 在区域 R 内可微：在区域 R 内的每个点都可微
    - 严谨判断：对于函数 $f(x,y)$，若 f_x 和 f_y 都在开区域 R 上连续，那么 $f(x,y)$ 在区域 R 上可微
- 微分近似
    - 设函数为 $z=f(x,y)$
    - 函数值的微分

$$dz=f_xdx+f_ydy$$

    - 函数值的变化量

$$\Delta z=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$$

    - 而因为函数可微，当 Δx 和 Δy 趋近于 0 时，ϵ_1 和 ϵ_2 趋近于 0。因为此时 Δx 和 Δy 并不大，因此我们可以试图使用省略后面两项。将函数值的变化量写作如下形式

$$\Delta z=f_x\Delta x+f_y\Delta y$$

    - 那么误差为 $\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$
    - 这种方法称为线性近似
- 误差分析
    - 相对误差公式为 $\frac{\Delta V}{V}$
    - 其可以近似为 $\frac{dV}{V}$
- 可导与连续
    - 如果函数 $f(x,y)$ 在区间 R 上可导，那么它在 R 上连续。证明如下
        - 我们的证明目标是从

$$\Delta z=(f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1)\Delta x+(f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2)\Delta y$$

到

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

- \因为 $f(x,y)$ 在区间 R 上可导，因此

$$\Delta z = (f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1)\Delta x + (f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2)\Delta y$$

- 且当 $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ 时，ϵ_1 和 ϵ_2 趋近于 0
- 因为

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

- 那么

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1)\Delta x + (f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2)\Delta y$$

- 因为

$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta y = y - y_0$$

- 那么原式可以改写为

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1)(x-x_0) + (f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2)(y-y_0)$$

- 令

$$x = x_0 + \Delta x$$
$$y = y_0 + \Delta y$$

- 那么原式可以改写为

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1)(x-x_0) + (f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2)(y-y_0)$$

- 而当 $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$，我们可以得到

$$\lim\,(x,y) \to (x_0,y_0) f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0$$

- 因此

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

- 满足连续性条件，因此当函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微时，函数在该处连续
- 如果函数 $f(x,y)$ 在区间 R 上不连续，那么它在 R 上一定不可导

多变量的链式法则

- 多变量链式法则
  - 简易方法：假设 w 是关于 x 和 y 的函数，而 x 和 y 又是关于 s 和 t 的函数。我们可以直接带入 x 和 y 的函数到 w（构成复合函数），以实现对 s 和 t 偏导的直接求

解。

- 单自变量的链式法则： w 是关于 x 和 y 的函数，而 x 和 y 又是关于 t 的函数。那么 w 关于 t 的导数为

> 注意 $\frac{dw}{dt}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 之间的区别，后者是求偏导，是指在有多个自变量的情况下，求解函数关于其中一个自变量的变化率。如果说只有 t 一个参数，而没有其他的，那么就是求导数。否则则用偏导符号，譬如 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- 多自变量的链式法则：w 是关于 x 和 y 的函数，而 x 和 y 又是关于 s 和 t 的函数。那么要求 w 关于 t 的偏导，和 w 关于 s 的偏导，我们需要分开求解

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

- 对于更多自变量的情况，链式法则依然适用

- 隐函数偏导 & 链式法则
  - 隐函数偏导

> 回顾：隐函数是无法直接得出 y 和 x 的关系的函数。其结果隐藏在 $F(x,y)=0$ 中

- 设隐函数的格式如下

$$F(x,y)=0$$

- 令 $w=F(x,y)$。我们现在可以看到，w 是关于 x 和 y 的函数，而 x 是关于 x 的函数，y 是关于 x 的函数。
- 换个符号，我们可以这样看，w 是关于 u 和 v 的函数（$w=G(u,v)$），而 $u=x$，$v=f(x)$。
- 根据链式法则，w 关于 x 的函数可以这样写

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

- 根据前文内容，我们知道 $w=0$，那么 $\frac{dw}{dx}=0$；再将 $u=x,v=f(x)$ 带回式子，可得

$$F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$$

- 因此可得隐函数中

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

- 隐函数链式法则

THEOREM 13.8 CHAIN RULE: IMPLICIT DIFFERENTIATION

If the equation $F(x, y) = 0$ defines y implicitly as a differentiable function of x, then

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0.$$

If the equation $F(x, y, z) = 0$ defines z implicitly as a differentiable function of x and y, then

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

方向导数和梯度

> 这个油管视频对方向导数和梯度的讲解很清晰：Directional Derivatives | What's the slope in any direction? - YouTube

- 两变量函数的方向导数
  - 前情提要：设存在一个曲线 $z = f(x, y)$。f_x 是当 y 固定时，在 x 方向上的曲线的斜率。f_y 是当 x 固定时，在 y 方向上的曲线的斜率。
  - 问题：根据之前的知识，我们只能求解在 x/y 方向上的斜率，无法求解三维曲面任意方向上的斜率（导数）。
  - 解决办法：引入方向导数的概念
    - 设我们想要求解的方向和 x 轴的夹角为 θ，那么该方向在 x 轴和 y 轴上的投影分别是 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$（此处定义的时候我们使用的是 θ，这样做有两个原因，一来是我们暂时不在乎走了多远，只需要定义行走的方向；二来是 $\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$，说明 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 是一个单位向量，后期我们可以用行走的长度乘以这个单位向量，来获取目的地的点坐标)
    - 假设我们的初始点坐标是 $P(x_0, y_0)$。**在 xOy 平面上**，往 θ 夹角方向走 t 个单位，那么 x 方向的坐标为 $x_0 + t\cos\theta$，y 方向的坐标为 $y_0 + t\sin\theta$。因此新的目的地的坐标为 $(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)$
    - 在定义斜率之前，我们先用一个公式来表达对于函数 $z = f(x, y)$，从 $P(x_0, y_0)$ 点触发，沿着与 x 轴为 θ 的角度走 t 个单位时，其函数值（z）的变化

$$\Delta z = f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)$$

    - 因为其在 xOy 平面上（**注意不是 x 轴或者 y 轴！**）上行走的单位为 t
    - 那么我们 $\frac{\Delta z}{t}$ 来定义该行走长度下的切线斜率

$$\frac{\Delta z}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

    - 要求解在 $P(x_0, y_0)$ 处的切线，我们需要让 $t \to 0$，那么该式便改写为

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta z}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

- 若函数在该处可导，根据前文多变量函数微分的性质可得

$$f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0) = f_x dx + f_y dy$$

> 证明在这里：
>
> **PROOF** For a fixed point (x_0, y_0), let $x = x_0 + t\cos\theta$ and let $y = y_0 + t\sin\theta$. Then, let $g(t) = f(x, y)$. Because f is differentiable, you can apply the Chain Rule given in Theorem 13.6 to obtain
>
> $$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta.$$
>
> If $t = 0$, then $x = x_0$ and $y = y_0$, so
>
> $$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\sin\theta.$$
>
> By the definition of $g'(t)$, it is also true that
>
> $$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}. \end{aligned}$$
>
> Consequently, $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\sin\theta$. ■

- 由于 $dx = t\cos\theta$，$dy = t\sin\theta$，因此上述式子可以改写为

$$\lim_{t \to 0}(f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)) = dz = f_x t\cos\theta + f_y t\sin\theta$$

- 用该式除以 t， 前面的导数公式可以改写为

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta z}{t} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$

- 而 $f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$ 可以改写为两个向量的点乘形式

$$f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = < f_x, f_y > \cdot < \cos\theta, \sin\theta >$$

- 那么前面的导数公式可以改写为

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta z}{t} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = < f_x, f_y > \cdot < \cos\theta, \sin\theta >$$

- 这里的向量 (f_x, f_y) 被称为梯度，也记作 $\nabla f(x, y)$，用来表示分别在 x 和 y 方向上的斜率，也就是随着 x 和 y 变化带来的函数值的变化量；$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 被称为方向向量，用来表示行走的方向相对于 x 轴偏离的方向（该方向也可以用 $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ 表示）；两者的乘积称为方向导数，以用 $D_{\vec{u}} f$ 表示。

- 公式总结

  > 注意：方向向量必须是单位向量，否则公式不成立（因为会把方向向量计算到行走的长度里去）；如果方向向量不是单位向量，那么必须化为单位向量

  - 方向导数

$$D_{\vec{u}}f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

若在 $P(x_0,y_0)$ 处可导，那么该导数可以改写为

$$D_{\vec{u}}f(x,y)=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta=<f_x,f_y>\cdot<\cos\theta,\sin\theta>=\nabla f(x,y)\cdot\vec{u}$$

- 两变量函数的梯度
  - 梯度是**平面中**的一个向量（注意不是空间中，因为 $\nabla f(x,y)$ 只有 2 个分量 (f_x,f_y) ），其指向的是函数值增加最快的方向
  - 回忆前文，在 $\vec{u}$ 方向上的方向导数的值是梯度和方向向量 $\vec{u}$ 的点乘
- 两变量函数梯度的应用

> 注意：梯度向量的方向和每一层的 Level curve 垂直（重要！）这个回答解释的很好

  - 寻找让函数值增加最快和最慢的方向
  - 可以将方向导数的表达式改写一下

  $$D_{\vec{u}}f(x,y)=|\vec{u}||\nabla f(x,y)|\cos\phi$$

  由于 $\vec{u}$ 是单位向量，因此 $|\vec{u}|=1$，那么该式由可以改写为

  $$D_{\vec{u}}f(x,y)=|\nabla f(x,y)|\cos\phi$$

  其中 ϕ 是梯度向量和方向向量的夹角。
  - 从该式子中可以看出，方向导数的最大值是在 $\cos\phi=1$ 时达到，也就是方向向量和梯度向量平行，最大值为 $|\nabla f(x,y)|$，沿着该方向走上升最快；最小值是在 $\cos\phi=-1$ 时达到，也就是方向向量和梯度向量刚好相反，最小值为 $-|\nabla f(x,y)|$，沿着该方向走下降最快；若 $\nabla f(x,y)=0$，那么方向导数为 0
  - 对于一个 `Level curve` $f(x(t),y(t))=c$，我们可以对其两边求导得到 $f_xx(t)'+f_yy(t)'=0$，由于 $(x'(t),y'(t))$ 就是沿着 `level curve` 的方向向量，而 (f_x,f_y) 就是对应的梯度，因此对于 `level curve`，梯度向量总是垂直于方向向量

  THEOREM 13.12 GRADIENT IS NORMAL TO LEVEL CURVES

  If f is differentiable at (x_0, y_0) and $\nabla f(x_0, y_0)\neq\mathbf{0}$, then $\nabla f(x_0, y_0)$ is normal to the level curve through (x_0, y_0).

- 三变量函数中的方向导数和梯度：其他方面都和两变量形式类似，只不过这次方向导数不再是斜率了（因为三变量以及函数值，会构成一个四维空间），此外，$\nabla f(x,y,z)$ 垂直于 `level surface` （不是 `level curve` 噢）

DIRECTIONAL DERIVATIVE AND GRADIENT FOR THREE VARIABLES

Let f be a function of x, y, and z, with continuous first partial derivatives. The **directional derivative of f** in the direction of a unit vector $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ is given by

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z).$$

The **gradient of f** is defined as

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Properties of the gradient are as follows.

1. $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. If $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, then $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = 0$ for all $\mathbf{u}$.
3. The direction of *maximum* increase of f is given by $\nabla f(x, y, z)$. The maximum value of $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ is

   $\|\nabla f(x, y, z)\|$. Maximum value of $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$

4. The direction of *minimum* increase of f is given by $-\nabla f(x, y, z)$. The minimum value of $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ is

   $-\|\nabla f(x, y, z)\|$. Minimum value of $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$

切平面和法线

- 普通二元函数转化为 `level curve / level surface`
  - 一般的二元函数具有 $f(x,y)$ 的形式，而要将其转化为 `level curve/level surface`，我们可以令 $z = f(x,y)$，那么 $f(x,y) - z = 0$
  - 我们令 $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$，那么 $F(x,y,z)$ 的图像就是一个 `level surface`
- 切平面和曲面法线的方程
  - 平面的法向量：$\nabla F(x,y,z)$
    - 证明如下
      - 设该曲面的方程为 $F(x,y,z) = 0$。现有一条曲线位于该曲面上，其方程为 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$
      - 对 $F(x,y,z) = 0$ 求导可得

$$F_x(x,y,z)x'(t) + F_y(x,y,z)y'(t) + F_z(x,y,z)z'(t) = 0$$

    - 那么

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

    - 因为 $\vec{r}'(t)$ 是沿着曲线轨迹的切线方向，因此可以看出 $\nabla F(x,y,z)$ 和该曲线垂直。因为没有特定的指明是曲面上的哪一条曲线，只是过点 P，因此 $\nabla F(x,y,z)$ 和曲面上过点 P 的任意一条曲线重合

    - 因此曲面在 P 这一点的法向量就是 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$
  - 切平面
    - 假设平面过一点 $P(x_0, y_0, z_0)$，因为平面的法向量为 $\nabla F(x, y, z)$，因此该向量和平面中过 P 的任何向量点乘都等于 0。因此该平面公式如下

      $$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

      又因为对于两变量函数 $F(x, y, z)=f(x, y)-z$，因此 $f_z=-1$，那么原式即为

      $$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

  - 曲面法线
    - 曲面法线的的方向为 $\vec{n}=\nabla F(x_0, y_0, z_0)$
    - 因为该法线过点 $P(x_0, y_0)$
    - 因此曲面法线的参数方程为：

      $$\begin{aligned} x&=x_0+F_x t \\ y&=y_0+F_y t \\ z&=z_0+F_z t \end{aligned}$$

      同上，对于两变量的函数 $f(x, y)$， 因为 $f_z=-1$，因此原式为

      $$\begin{aligned} x&=x_0+F_x t \\ y&=y_0+F_y t \\ z&=z_0-t \end{aligned}$$

- 例题：两平面交线在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线求解
  - 注意：两平面相交于一条曲线，那么这条曲线垂直于两个平面的法线。两个平面的法线的向量分别为两个平面的 ∇ 算子。那么要求同时垂直于两个向量的向量，就需要对两个梯度向量求叉乘，得到的结果为这条切线的方向向量。
  - 要求一点 P 处的切线，将 P 点的坐标带入方向向量即可。
  - 空间中平面的倾角求解

    > 某一曲线在 $P(x_0, y_0)$ 处的切平面和水平面的倾角可由以下公式得到

    $$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

  - 复习：两平面夹角求解
    - 两个平面各有一个法向量，该法向量的值即为平面的 ∇ 算子。平面的夹角就是法向量的夹角。通过前文的点乘公式，我们可以求解夹角的余弦值。
- 夹角和倾角的不同点在于：夹角允许一个平面是斜着的，而倾角是一个平面和水平面的夹角。三维空间中水平面的法向量就是 $\vec{k}$，因此求一个平面的倾角 -> 该平面法向量和 $\vec{k}$ 的余弦值
- $\nabla f(x, y)$ 和 $\nabla F(x, y, z)$ 比较
  - 存在函数 $f(x, y)=z$， $\nabla f(x, y)$ **是二维空间中的向量**，其垂直于 `level curve` $F(x, y, z)=f(x, y)-z=0$

  - 存在函数 $f(x,y,z)=h$，$\nabla f(x,y,z)$ **是三维空间中的向量**，其垂直于 `level surface` $F(x,y,z,h)=f(x,y,z)-h=0$

两变量函数的极值

> 这里最小值、最大值、极小值、极大值的含义都和但变量函数中的概念相似。只不过区间的开闭的定义发生了一些变化。

- 最值点：一个 `closed region R` （也就是包含边界） 内，如果一个点比区域内所有的点都大/小，那么它是区域内的最大/最小值
- 极值点：一个 `open region R` （也就是不包含边界） 内，如果一个点比它邻域里面所有的点都大/小，那么它是区域内的极大/极小值
  - 驻点
  - 函数的极大/极小值可能出现的点
  - 特点：对于两变量函数 $f(x,y)$， f_x 和 f_y 均为 0，或者其中一个偏导不存在
  - 原理：两个偏导都是 0，也就意味着在这一点上，x 轴方向和 y 轴方向上的斜率都是 0，那么这一点就是一个水平的切平面。水平切平面上的切点，要么就是极小值，要么就是极大值。
  - 注意
    - 如果一个点是极值点，那么它一定是驻点；反之，如果一个点是驻点，那么它不一定是极值点。因为可能在函数值从小到大的变化过程中，有一个水平面作为过渡的水平面（就像单变量函数 $f(x)=x^3$ 中出现的那样，$(0,0)$ 这个点的导数为 0，但它并不是极值点）
    - 我们可以通过判断其周围的函数值（利用配方凑出平方项），来确定该点是否为极值点。
    - 但是我们无法直接从 f_x 或者 f_y 判断这个函数是否是极值点，也无法直接通过二阶导 f_{xx} 和 f_{yy} 判断这里的凹凸性（对于单变量函数，$y'=0$ 且 $y''\neq 0$ 可以直接判断极值点）。
    - 对于多变量函数，我们需要基于驻点的概念，在后期进行严格的极值点定义。
  - 使用二阶偏导找到两变量函数的相对极值（基于驻点的极值点严格定义）

    > 复习：单变量函数的凹凸性和其极值的关系
    > - 如果单变量函数的二阶导>0，那么其一阶导数逐渐增加，你可以看到函数图像从左往右先减小，后增大
    > - 否则其一阶导数逐渐减小，函数图像从左往右先增大后减小

  - 鞍点（`saddle point`）：一个 $f_x=0$ 且 $f_y=0$ 的点，在一个方向上是极大值，在另一个方向上是极小值；如函数 $f(x,y)=y^2-x^2$ 在 $(0,0)$ 这个点的情况
  - 二阶偏导测试
    - 对于驻点（也就是 $f_x=0$ 且 $f_y=0$ 的点），要测试其是否是相对极值点，以及是极大值还是极小值，需要通过 $d=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$
    - 如果 $d>0$ 且 $f_{xx}>0$，那么该点是极小值点
    - 如果 $d>0$ 且 $f_{xx}<0$，那么该点是极大值点

    - 如果 $d<0$，那么该点是鞍点
    - 如果 $d=0$，啥也不是，需要通过绘图确定极大还是极小值
    - 如果有偏导不存在的情况，那么需要绘图确定极大还是极小值
  - 测试原理
    - 如果 $d>0$，也就是说 $f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$，那么 f_{xx} 和 f_{yy} 符号相同。也就是说这个函数在 x 轴和 y 轴方向的曲线上，凹凸性相同，那么该点一定是极值点。否则如果 $d<0$，就说明这个函数在 x 轴和 y 轴方向的曲线上，凹凸性不同，一边是极大值，一边是极小值。
    - 在 d 的基础上，测试 f_{xx}，就可以得知 x 方向上的凹凸性，确定其是极大值还是极小值
    - 该测试也可以用行列式表示，如下

$$d=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

- 极值点到最值点：需要将极值点的函数大小和边界上的点的函数大小比较。如果边界上的点的值更大/小，那么边界上的值是最值（大/小）。否则，极值点就是最值点。
- 更多变量函数的驻点：所有的一阶偏导都为 0 的点，其他的定理在此处不予扩展

两变量函数极值的应用

- 多变量函数值的最优化问题（应用题，根据题意列出函数，然后根据前文的极值求解方法确定最大/最小值）
  - 最小二乘法（几个重要公式）
    - 平方误差和，我们的目的是让 S 尽可能小

$$S=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2.$$

  - Least Square regression line（证明见课本 P 965 面，此处不证明）

THEOREM 13.18 LEAST SQUARES REGRESSION LINE

The **least squares regression line** for $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ is given by $f(x) = ax + b$, where

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \quad \text{and} \quad b=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i\right).$$

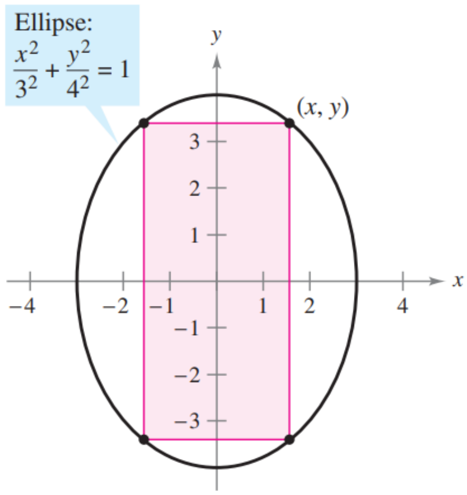
拉格朗日乘子法

- 拉格朗日乘子法理解
  - 应用：部分的函数极值问题。在限制函数的定义域的基础上，对函数中变量的关系提出了更高的要求，譬如在 $(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{4})^2=1$ 的情况下，求解 $f(x,y)=4xy$ 的最大值
  - 原理

- 将原式 $f(x,y)$ 改写为 `level curve`

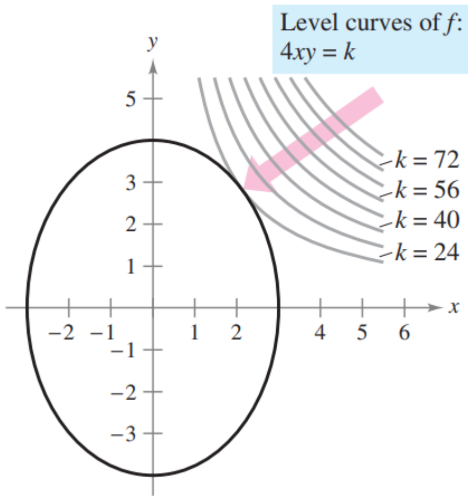
$$z = f(x,y)$$

- 那么问题的求解就可以转变为：找到 $f(x,y)$ 和椭圆曲线相切点的 z，用图像描述如下



Objective function: $f(x, y) = 4xy$

Figure 13.78



Constraint: $g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Figure 13.79

- 根据前文我们知道，函数的梯度向量 $\nabla f(x,y)$ 垂直于 $f(x,y)$ 的 `level curve`。**因为两个曲线相切，那么他们的梯度向量应该平行。因此，$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$（此处 $g(x,y)$ 指代椭圆曲线），λ 是拉格朗日乘子**

- 定理

THEOREM 13.19 LAGRANGE'S THEOREM

Let f and g have continuous first partial derivatives such that f has an extremum at a point (x_0, y_0) on the smooth constraint curve $g(x, y) = c$. If $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, then there is a real number λ such that

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

- 定理证明

PROOF To begin, represent the smooth curve given by $g(x, y) = c$ by the vector-valued function

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

where x' and y' are continuous on an open interval I. Define the function h as $h(t) = f(x(t), y(t))$. Then, because $f(x_0, y_0)$ is an extreme value of f, you know that

$$h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

is an extreme value of h. This implies that $h'(t_0) = 0$, and, by the Chain Rule,

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

So, $\nabla f(x_0, y_0)$ is orthogonal to $\mathbf{r}'(t_0)$. Moreover, by Theorem 13.12, $\nabla g(x_0, y_0)$ is also orthogonal to $\mathbf{r}'(t_0)$. Consequently, the gradients $\nabla f(x_0, y_0)$ and $\nabla g(x_0, y_0)$ are parallel, and there must exist a scalar λ such that

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

■

- 使用拉格朗日乘子法解决限制条件下的最优化问题（应用题）
- 2 限制条件下的拉格朗日乘子法

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

Chapter 14：重积分

> 这章的重点在于计算

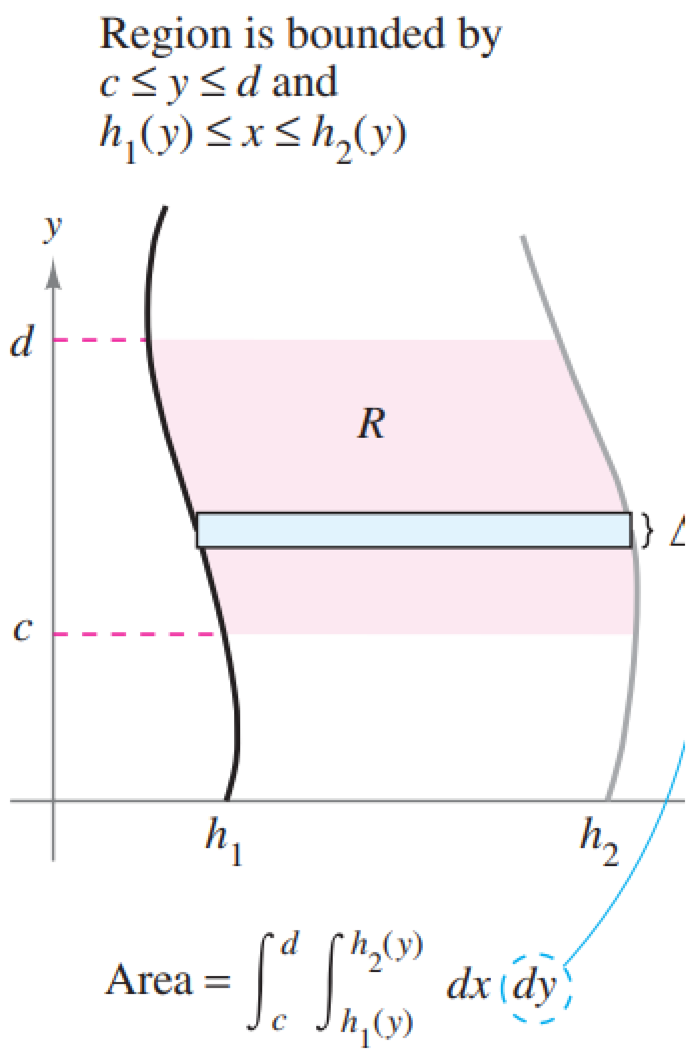
多层积分与平面面积

- 多层积分
  - 起源：对多元函数的单个变量求积分是求偏导的逆运算。设现在有函数 $f(x,y)$，对 x 积分可得到关于 y 的函数；同理，对 y 积分可得到关于 x 的函数。对多元函数的各个变量逐次求积分，即可还原该函数
  - 注意：如果对 y 积分，那么 x 是常数，y 是变量，因此 y 不可以同时出现在定积分的区间上；对 x 同理。
- 利用多层积分求解平面面积：两种方式

  > 注意：这里的求解方法和我们在单变量里面看到的是相似的，区别在于在单变量微积分中我们没有展露对第一个变量求积分的过程，而是直接将其写成 $h(x) - g(x)$。这是因为 dx 本身积分得到 x，直接带入即可。现在学习多元微积分时，我们对这个求面积的过程的第一步进行了细化。积分式为 dx 的原因是这里是求解面积，暂时没有厚度。后期可能会出现厚度为常数，或者厚度为一个关于 x 和 y 的函数的情况发生。此外，这里上下界为函数，如果该函数是个常数，那么形成的图形是个矩形。
  > 此外，不同的积分顺序不会带来结果的不同，但是在积分过程中的计算复杂性可能会有很大的差别。

  - 先 dx 后 dy
    公式如下：

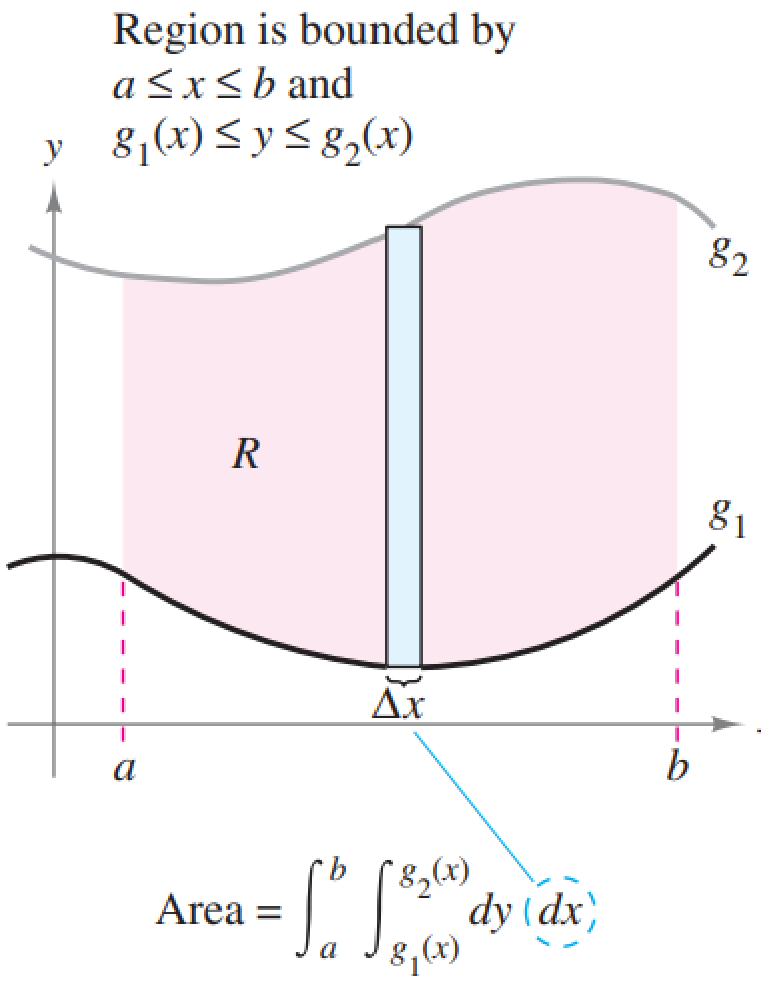
$$A=\int_a^b\int_{g(y)}^{h(y)} dxdy$$



Horizontally simple region
Figure 14.3

- 先 dy 后 dx
  公式如下:

$$A=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} dydx$$



Vertically simple region
Figure 14.2

二重积分与体积

- 导引：上一节中我们写到，能用二重积分表示面积，是因为平面没有厚度，所以我们可以直接对 dx 或者 dy 积分。那么这一节就是在平面的基础上加了厚度。厚度可以是一个常数，那么整个立体图形的高就是平的。但是更常见的情况是每一点的高是一个关于 x 和 y 的函数 $f(x,y)$
- 用二重积分表示体积
  - 二重积分定义：如果 f 是在闭合区域 R 上的连续函数，那么二重积分定义如下：

    $$\int_R \int f(x,y)dA = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

    如果极限存在，那么说 f 在区域 R 上可积。
  - 体积求解
    - 如果 f 在区域 R 上可积分（R 可以是多个可积分表面的聚合），且 f 在 R 上恒正， 那么该积分的值是体积
- 二重积分性质（已知 $f(x,y)$ 为厚度）
  - 厚度乘上常数，总体积乘上常数
  - 对两厚度函数相加再积分，结果等于对两个厚度分别积分再相加

    - 如果 $f(x,y)>0$，最后的体积也大于 0
    - 如果厚度 1 $f(x,y)$ 大于厚度 2 $g(x,y)$.，那么对厚度 1 积分后的体积大于对厚度 2 积分后的体积
    - 多个不相交的区域面积可以聚合，结果等于对其分别求体积再相加
- 二重积分计算

  THEOREM 14.2 FUBINI'S THEOREM

  Let f be continuous on a plane region R.

  1. If R is defined by $a \le x \le b$ and $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, where g_1 and g_2 are continuous on $[a, b]$, then

  $$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

  2. If R is defined by $c \le y \le d$ and $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, where h_1 and h_2 are continuous on $[c, d]$, then

  $$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

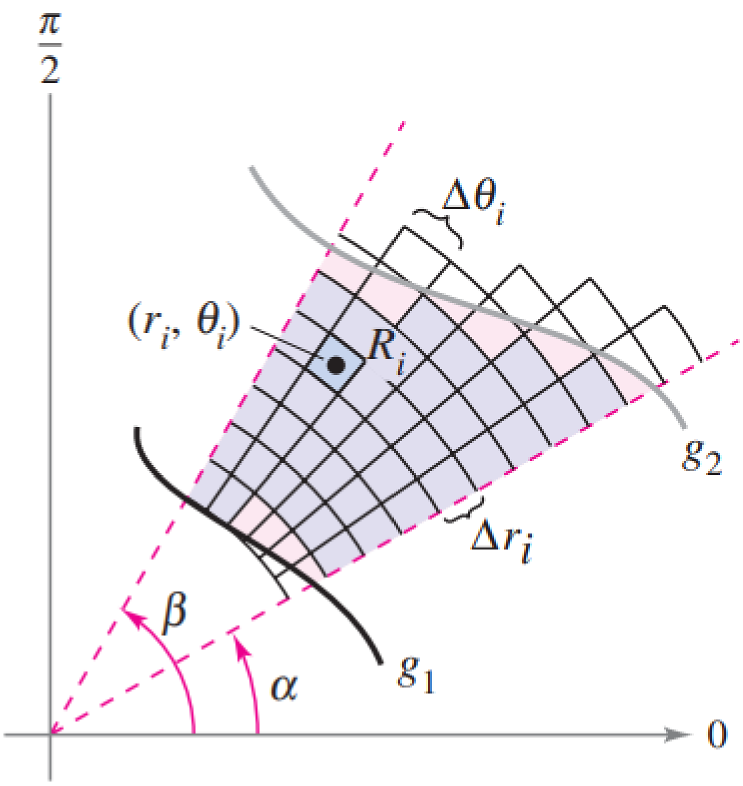
- 求解一片区域内函数的平均值：体积（对厚度为 $f(x,y)$ 作二重积分）/面积（对厚度为 0 作二重积分）=平均高（厚度）

基底变换：极坐标下的二重积分

- 直角坐标系到极坐标
    - 直角坐标系相关值：$x, y, f(x,y)$
    - 极坐标相关值：$r, \theta, g(\rho, \theta)$
    - 直角坐标系下的体积公式为：

$$V=\int_R\int f(x,y)dxdy$$

    - 对于极坐标系
        - 元面积是一个小的扇形区间，其夹在 $\Delta\theta$ 中，内测边缘的半径为 r，厚度为 Δr 。如图



Polar grid superimposed over region R

Figure 14.26

- 对于该区域，内测的弧长为 $r\Delta\theta$，厚度为 Δr，因此该部分的面积近似为 $r\Delta\theta\Delta r$
- 那么对 $\Delta\theta$ 和 Δr 取极限，总的面积可以近似为

$$A = \int_R \int f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

- 因此我们得到如下公式

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_S\int f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dA$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta.$$

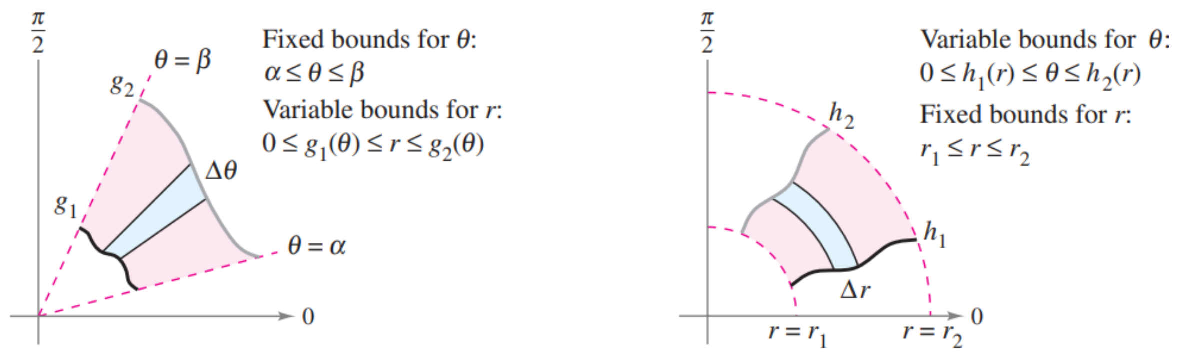
- 极坐标下的积分换元公式总结

THEOREM 14.3 CHANGE OF VARIABLES TO POLAR FORM

Let R be a plane region consisting of all points $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ satisfying the conditions $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, where $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$. If g_1 and g_2 are continuous on $[\alpha, \beta]$ and f is continuous on R, then

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta.$$

- 两种积分类型：R 边界明确型 / θ 边界明确型



r-Simple region
Figure 14.29

θ-Simple region

质心与转动惯量

- 利用二重积分求解平面质量
  - 对于一个平面，如果它的密度是个常数 ρ，那么直接把常数加到积分式里面去即可
  - 如果它的密度是个变量 $\rho(x, y)$，那么就把 $\rho(x, y)$ 加到积分式里面去
  - 如果是在极坐标下，那么就需要把 $\rho(x, y)$ 转化成 $\rho(r\cos\theta, r\sin\theta)$，然后再加到积分式子里面去
- 求解平面质心（一阶矩）

> 当密度 ρ 为常数时，可无需进行积分运算，直接利用质心公式求解即可，或者肉眼观察

  - 设质量分布在二维平面不同坐标处，每个坐标处的质量为 $\rho(x, y)dA$，总质量为 $\int_R \int \rho(x, y)dA$
  - 设现有一点 (x_i, y_i)，那么其在 x 轴上的矩为 $x_i\rho(x, y)dA$，其在 y 轴上的矩为 $y_i\rho(x, y)dA$
  - x 方向质心
    - 为 x 轴上矩之和 / 总质量
    - x 轴上矩之和为 $M_y = \int_R \int x\rho(x, y)dA$
    - 根据前文的总质量，得出 x 方向上的质心为

$$m_x = \frac{\int_R \int x\rho(x, y)dA}{\int_R \int \rho(x, y)dA}$$

  - y 方向质心
    - 为 y 轴上矩之和 / 总质量
    - y 轴上矩之和为 $M_x = \int_R \int y\rho(x, y)dA$
    - 根据前文的总质量，得出 y 方向上的质心为

$$m_y = \frac{\int_R \int y\rho(x, y)dA}{\int_R \int \rho(x, y)dA}$$

- 求解转动惯量

  > In the same way that mass is a measure of the tendency of matter to resist a change in straight-line motion, the moment of inertia about a line is a measure of the tendency of matter to resist a change in rotational motion.

  - 转动惯量公式 $I = Md^2$
  - 转动惯量的求解：将上一步求解一阶矩的 x 或 y 替换为 x^2 和 y^2，其他内容不变
  - 公式

  $$
  \begin{aligned}
  I_x &= \int_R \int y^2 \rho(x, y) dA \\
  I_y &= \int_R \int x^2 \rho(x, y) dA \\
  I_0 &= I_x + I_y
  \end{aligned}
  $$

  其中 I_0 也被称为 `polar moment of inertia`，因为它有如下的特点

  $$
  I_0 = \int_R \int (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA = \int_R \int r^2 \rho(x, y) dA
  $$

- 转动惯量的应用->动能公式

$$
I = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2
$$

- 回转半径公式

$$
r = \sqrt{\frac{I}{M}}
$$

二重积分求解表面积

> 关于多重积分求解 `surface area`，Ron Larson 的课本对于那个元面积的公式来源讲解的并不是很明确，这个文档讲解的更好：[13.5: Surface Area - Mathematics LibreTexts]

- 原理
  - 利用小块切平面的面积来近似曲面的面积
  - 切平面是个菱形，其两个方向向量分别为 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$，其中 $\vec{u}$ 是当 y 一定时，x 方向上的向量；而 $\vec{v}$ 是当 x 一定时，y 方向上的向量；该菱形的面积为 $|\vec{u} \times \vec{v}|$
  - 切平面在 x 方向上如果前进 1 个单位，y 方向上不变，z 方向上变化 f_x 个单位；因此当 x 方向上前进 Δx 个单位时，z 方向上变化 $\Delta x f_x$ 个单位；那么向量 $\vec{u} = (\Delta x, 0, f_x \Delta x)$
  - 切平面在 y 方向上如果前进 1 个单位，x 方向上不变，z 方向上变化 f_y 个单位；因此当 y 方向上前进 Δy 个单位时，z 方向上变化 $\Delta y f_y$ 个单位；那么向量 $\vec{v} = (0, \Delta y, f_y \Delta y)$
  - 因为（此处 dA 是 Δx 和 Δy 围成的正方形面积）

$$dS = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

- 那么该曲面的面积就是

$$S = \int_R \int \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

- 极坐标下的曲面面积
  - 应用场景：当求解的是轴堆成立体图形时，将直角坐标系公式转化为极坐标公式更好求解
  - 方法
    - 将平方根下的公式转化为带 r 和 θ 的式子
    - $dA = r dr d\theta$
- 用辛普森公式近似面积：略
- 相似公式总结

Length on x-axis:	$\int_a^b dx$
Arc length in xy-plane:	$\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$
Area in xy-plane:	$\int_R \int dA$
Surface area in space:	$\int_R \int dS = \int_R \int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA$

三重积分及其应用

> 问：三重积分求解体积和二重积分求解有什么区别？
> 回想一下二重积分，如果二重积分的积分单位是 $dxdy$，那么我们是求解平面的面积；如果积分单位是 $f(x, y)dxdy$，我们求解的是在点 (x, y) 处厚度为 $f(x, y)$ 的三面体的体积；
> 如果积分单位是 $\rho(x, y)$，我们求解的是平面上的厚度；
> 对于三重积分，如果我们的求解单位是 $dxdydz$，那么我们求解的是三维图形的体积；如果积分单位是 $f(x, y, z)$，我们求解的是在点 (x, y, z) 处厚度为 $f(x, y, z)$ 的三维图形的质量；

- 三重积分的基本公式

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV$$

- 利用三重积分求解体积
  - 与二重积分时同理，如果直接对 dV 进行三重积分，求解得到的就是体积，公式如下

$$Q = \iiint_Q dV$$

- 三重积分的性质：与二重积分类似

1. $$\iiint\limits_Q cf(x, y, z)\, dV = c\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV$$

2. $$\iiint\limits_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, dV = \iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV \pm \iiint\limits_Q g(x, y, z)\, dV$$

3. $$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{Q_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint\limits_{Q_2} f(x, y, z)\, dV$$

- 三重积分的计算：利用多层积分（同二重积分）

> 比较建议的求解方法是：先求 dz 层积分，然后将得到的结果投射在二维平面上，即可确定接下来的二重积分 $dxdy$ 的定义域。求解的时候注意谨慎选择积分顺序。此外必须确定各个变量的积分上下限（重要！）

THEOREM 14.4 EVALUATION BY ITERATED INTEGRALS

Let f be continuous on a solid region Q defined by

$$a \leq x \leq b, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x), \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

where h_1, h_2, g_1, and g_2 are continuous functions. Then,

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

- 利用三重积分求解质量
  - 设函数为 $f(x, y)$，且点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$
  - 该三维体的质量为

$$M = \iiint \rho(x, y, z) dV$$

- 利用三重积分求解质心和转动惯量

> 质心和转动惯量的求解和二维情况下相似，但是需要

  - x 轴上的一阶矩和质心为

$$M_{yz} = \iiint x\rho(x, y, z) dV$$
$$m_{yz} = \frac{\iiint x\rho(x, y, z) dV}{\iiint \rho(x, y, z) dV}$$

  - y 轴上的一阶矩和质心为

$$M_{xz} = \iiint y\rho(x,y,z)dV$$
$$m_{xz} = \frac{\iiint y\rho(x,y,z)dV}{\iiint \rho(x,y,z)dV}$$

- z 轴上的一阶矩和质心为

$$M_{xy} = \iiint z\rho(x,y,z)dV$$
$$m_{xy} = \frac{\iiint z\rho(x,y,z)dV}{\iiint \rho(x,y,z)dV}$$

- x 轴上的转动惯量

$$I_x = \iiint y^2 + z^2\rho(x,y,z)dV = I_{xz} + I_{xy}$$

- y 轴上的转动惯量

$$I_y = \iiint x^2 + z^2\rho(x,y,z)dV = I_{xy} + I_{yz}$$

- z 轴上的转动惯量

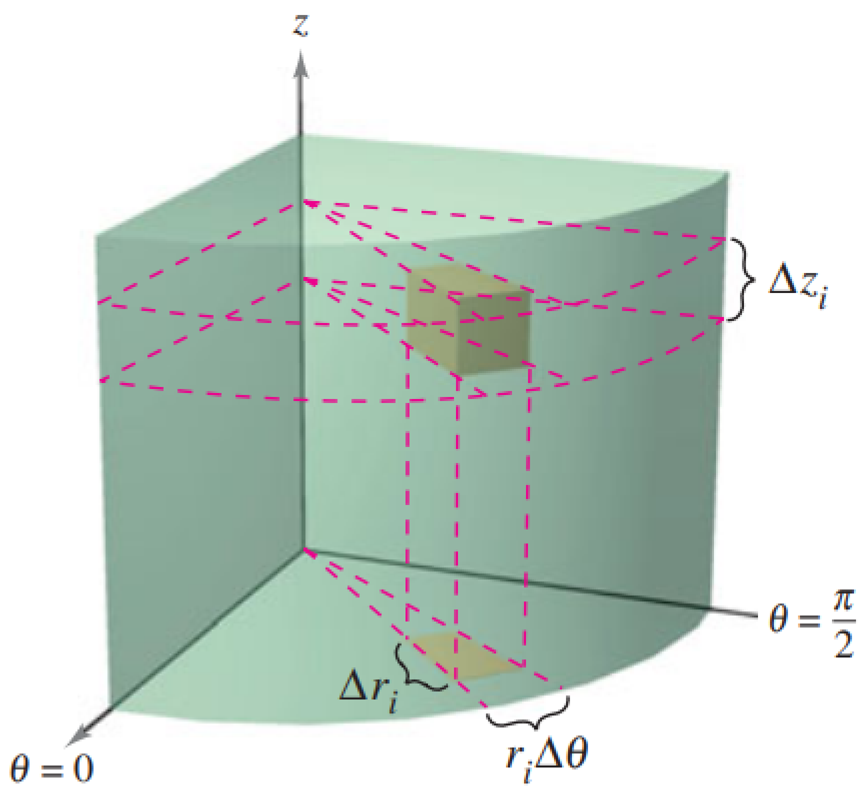
$$I_z = \iiint x^2 + y^2\rho(x,y,z)dV = I_{xz} + I_{yz}$$

圆柱坐标系和球坐标系下的三重积分

- 圆柱坐标系下的三重积分
  - 圆柱坐标系复习
    - $x = r\cos\theta$
    - $y = r\sin\theta$
    - $z = z$
  - 极坐标下三维空间中的体积

    > 对于极坐标下的三维体积分，我们的做法是在最内层对 dz 进行积分，然后转化为二维重积分的求解。在求解二位重积分时，我们可以将三维体投影到 xOy 平面上，以确定 r 和 θ 的边界。 - 需要由 3 个变量定义：r，θ 和 z

    - 比较难以求解的方向是：当 r 的边界不确定（是波动的函数）
    - 因从我们对限制条件下的三维体进行建模，也就是 r 的边界清晰。在这个限制条件下，单个微元的形态如图



Volume of cylindrical block:
$\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \Delta z_i$
Figure 14.63

- 因为该微元位于半径 r 处，而夹角为 $\Delta\theta$，因此其单边弧长为 $r\Delta\theta$，而厚度为 Δr\$，因此该微元的体积为\$$r\Delta\theta\Delta r$ - 那么极坐标下该三维体的体积为

$$V = \iiint rdzd\theta dr$$

- 极坐标下的三重积分的一般公式为

$$\iiint f(x,y,z)dzdxdy = \int\int(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y,z)} f(x,y,z)dz)rd\theta dr = \iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdzdr$$

- 极坐标下的体积公式

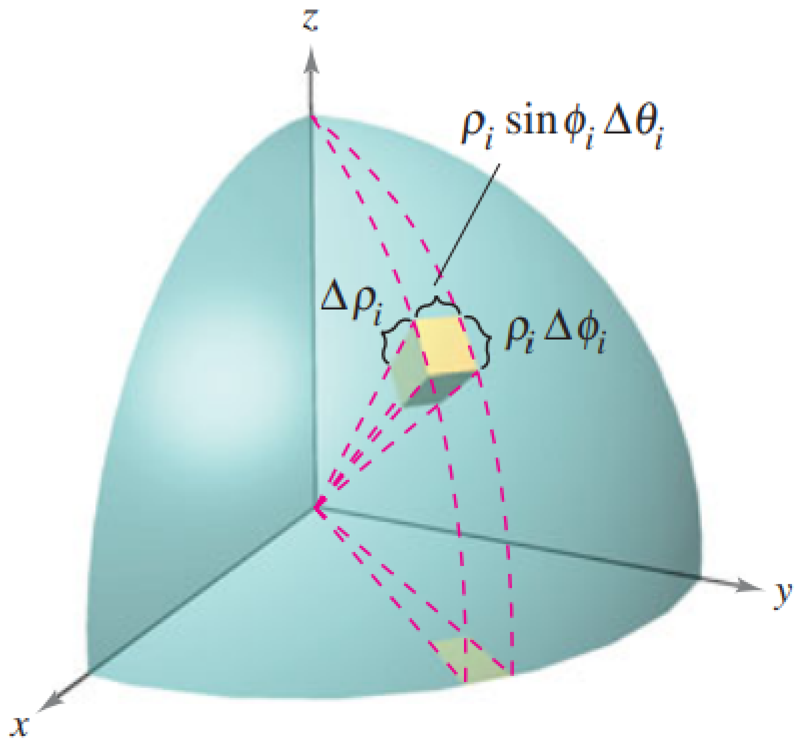
$$\iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdzdrd\theta$$

- 球坐标系下的三重积分
  - 球坐标系复习
  - 三个量：ρ，θ 和 ϕ
    - 其中 ρ 是从原点到该点的距离
    - θ 是该坐标在 xOy 平面上的投影和 x 轴的夹角
    - ϕ 是原点与该坐标连成的直线与 z 轴之间的夹角
  - 球坐标系与直角坐标系

    - $z = \rho\cos\phi$
    - $x = \rho\sin\phi\cos\theta$
    - $y = \rho\sin\phi\sin\theta$
- 球坐标系的微元定义

  > 对于球坐标系，不是所有情况下都适用，仅仅适用于 ρ, ϕ, θ 的边界比较清楚的情况。也就是三维图形是个规整球体或者同心球的一部分。

    - 微元形态定义如下：



Spherical block:
$\Delta V_i \approx \rho_i^2 \sin\phi_i \Delta\rho_i \Delta\phi_i \Delta\theta_i$
Figure 14.68

        - 根据上述的微元形态，我们可以看到，这个块位于半径 ρ 处，在 xOy 平面上的投影的夹角是 $\Delta\theta$，其侧面的一条边长为 $\rho\sin\phi\Delta\theta$（重要，因为这里这个块已经被投影到 xOy 上了，θ 是 xOy 平面上的夹角）；其与 z 轴的夹角为 ϕ，因为该块的夹角是 $\Delta\phi$，因此这个块侧面的另一条边长为 $\rho\Delta\phi$；其宽度为 $\Delta\rho$。因此如果将该块作为长方体看待，其体积为 $\rho\sin\phi\Delta\theta\rho\Delta\phi\Delta\rho$，简化一下就是

$$\Delta V = \rho^2 \sin\phi\Delta\theta\Delta\phi\Delta\rho$$

    - 球坐标系下的体积
        - 根据之前的微元公式，我们可以得到球系下的体积公式

$$V = \iiint \rho^2 \sin\phi d\theta d\phi d\rho$$

- 球坐标系下的三重积分公式 - 一般的三重积分公式的因子不是 1，而是 $f(x,y,z)$，切换到球系下也就是 $f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$ - 因此，一般的三重积分公式如下

$$\iiint f(x,y,z)dV = \iiint f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\theta d\phi d\rho$$

基底变换的新方法：Jacobian 矩阵

> 这里有一个非常好的油管视频，它讲解了坐标的基底变换，甚至囊括了微积分和线性代数的关系：What is Jacobian? | The right way of thinking derivatives and integrals (youtube.com)

- Jacobian 矩阵理解
  - 前情提要
    - 对于单变量微积分，令 $x = g(u)$，那么 $dx = g'(u)du$，这是单变量微积分的基地变换
    - 对于多变量微积分，我们要进行基地变换，比如从普通的平面直角坐标系变换到极坐标系
    - 我们知道 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，那么要从 $dxdy$ 转变到带 $drd\theta$ 的格式，就需要我们进行基底的变换
    - 在前面的学习中，我们主要是利用三维图形的几何关系观察进行微元的建立，在此基础上进行基底的变换，而现在介绍了 Jacobian 矩阵，我们可以利用 Jacobian 矩阵直接进行基地的变换
    - 令 $x = f(u,v)$，且 $y = g(u,v)$，那么 x 和 y 都是关于 u 和 v 变化的量。向量 (x,y) 在空间中是同一个量，但是我们对其基底进行了扭曲。而 Jacobian 矩阵是个行列式，他衡量的是这个线性空间变化的量度。因此我们可以理解为什么在求解积分，进行基底变换后，最终的积分结果的值没有发生改变，而是求解积分的式子发生了改变。
  - Jacobian 矩阵公式
    - 设 $x = g(u,v)$，且 $y = h(u,v)$，那么可得如下式子

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(g(u,v),h(u,v))\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

    - 这其中的行列式就是 Jacobian 矩阵
  - Jacobian 行列式推导

> 核心：将 x,y,u,v 都看成坐标系中的向量。基底变换就是用一组向量去表示另一组向量，Jacobian 矩阵就是指代基底变换的量度。当使用 $\vec{x},\vec{y}$ 去表示 $\vec{u},\vec{v}$ 时，我们是假定 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 是垂直的向量，然后衡量在这个基础上 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 作为基地时面积相较于 $dudv$ 变化的量度。如果不明白可以参考这个视频：Oxford Calculus: Jacobians Explained - YouTube

- 同样，设 $x = g(u, v)$，且 $y = h(u, v)$
- 那么我们现在的目标就是用带 u, v, du, dv 的式子来表示 dx 和 dy
- 当 v 一定时，x 在 u 方向上的变化量是 $\frac{\partial x}{\partial u}$
- 当 u 一定时，x 在 v 方向上的变化量是 $\frac{\partial x}{\partial v}$
- 根据前文的全微分表达式

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$

- 同理，对 y 分析如下

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

- 那么你会问，既然 dx 和 dy 在原式中是直接相乘，为什么这里的 dx 和 dy 关于 u, v 的表达式不是直接相乘，而是要改成行列式，然后再乘 $dudv$。这是因为在计算原式是，我们最初表达的并不是 $dxdy$，而是 dA，也就是 x 和 y 围成的平行四面体的面积。在用直角坐标系表达时， dx 和 dy 可以直接相乘是因为他们在直角坐标系中夹角为 90°，这个时候 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 并不是垂直的。但是在基底变换以后，我们是假设 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 垂直，这个时候 $\vec{dx}$ 和 $\vec{dy}$ 不再是垂直的向量，他们是 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 的线性组合。因此我们要求解由 $\vec{dx}$ 和 $\vec{dy}$ 围成的平行四面体的空间，就需要对 dx 和 dy 进行叉乘。
- dx 可以拆分成 ∇ 算子和 (du, dv) 的点乘

$$dx = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}) \cdot (du, dv)$$

- dy 可以拆分成 ∇ 算子和 (du, dv) 的点乘

$$dy = (\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}) \cdot (du, dv)$$

- 叉乘的式子如下

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{vmatrix}$$

- 对该式进行求解得到

$$\frac{\partial x}{\partial u}du\frac{\partial y}{\partial v}dv - \frac{\partial x}{\partial v}dv\frac{\partial y}{\partial u}du$$

- 该值也就是

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

- Jacobian 矩阵由此得，推导完成

- Jacobian 矩阵计算实例：直角坐标系到极坐标系

- 极坐标系回顾
  - $x = r\cos\theta$
  - $y = r\sin\theta$
- Jacobian 矩阵推导
  - 这里要求我们用 (r,θ) 表达 (x,y)，将 $dxdy$ 转化为 $Jdrd\theta$，那么这里的 u 就是 r，这里的 v 就是 θ
  - 根据 Jacobian 公式可得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} drd\theta$$

  - 简化 Jacobian 矩阵可得

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

  - 那么可得 $dxdy$ 应该被转化为 $rdrd\theta$
- Jacobian 矩阵应用
  - 寻找能简化区域表达式的基底变换：尽量转换成一个贴合坐标轴的矩形。
  - 利用基底变换简化积分求解
    - 首先需要设置合理的基底变换，并且确定变换后的积分上下界
    - 设 $x = g(u,v)$，且 $y = h(u,v)$
    - 那么在积分式中直接将 $f(x,y)$ 替换为 $f(g(u,v),h(u,v))$，将 $dxdy$ 直接替换为 $Jdudv$（J 为 Jacobian 行列式）即可（证明略，可见课本 1047 面）

Chapter 15：向量分析（向量场，线积分和平面积分）*

> 本章的重点主要在于计算，难点主要在于几个物理意义的理解及运用：包括旋度、散度、线积分、保守场、路径独立性、格林公式、参数曲面、曲面积分、曲面的定向、曲面的通量、散度定理、斯托克斯公式。学习之前可以先看维基百科上的简介和油管上的视频学习内容，然后再阅读教材，这样会对课程的脉络有比较清晰的认识。油管上这个 playlist 不错：Calculus IV: Vector Calculus (Line Integrals, Surface Integrals, Vector Fields, Greens' Thm, Divergence Thm, Stokes Thm, etc) **Full Course** - YouTube 虽然说这哥们儿之前讲 Jacobian 的时候，有一点点错误。但是他对数形结合以及基本概念的讲解很清晰。

向量场

- 向量场概念理解
  - 之前我们学习的向量值函数：$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$，在该式中描述了一个曲线，这个曲线的每个点的坐标由 x, y, z 这三个关于 t 的函数决定
  - 现在我们要学习的向量值函数（2 种）
    - 每个点是一个平面中的向量（$x\vec{i} + y\vec{j}$），这里的 x, y 不再是关于 t 的轨迹函数，而是一个变量本身，也可能是关于 (x,y) 的函数

    - 每个点是一个空间中的向量（$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$），这里的 x,y,z 不再是关于 t 的轨迹函数，而是一个变量本身，也可能是关于 (x,y,z) 的函数
  - 这样的向量值函数又称为向量场，它是平面/空间中向量的集合
  - 向量场的应用：用向量表示力（`force field`），或用向量表示速度（`velocity field`）
  - 向量场定义
    - 平面区域 R 中的向量场是给平面中的每个点 (x,y) 都分配一个向量 $\vec{F}(x,y)$
    - 空间区域 R 中的向量场是给空间中的每个点 (x,y,z) 都分配一个向量 $\vec{F}(x,y,z)$
  - 向量场示例
    - 梯度场：一个函数 $f(x,y)$ 的梯度 $\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)$ 在平面直角坐标系中就是一个梯度场，每个坐标处都有不同的梯度向量，指向该函数增长最快的路线
    - 速度场
    - 重力场：由万有引力定义得到

      $$\vec{F}(x,y,z)=\frac{-Gm_1m_2}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

      其中 $|\vec{r}|^2=x^2+y^2+z^2$，因为所有到原点距离相同的点的引力大小都相等，方向都指向原点，因此该场也称为中心力场（`central force field`）
    - 电场：由库仑定律得到

      $$\vec{F}(x,y,z)=\frac{cq_1q_2}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

    - 平方反比场（`inverse squared field`）：像重力场和电场这样大小都和距离的平方成反比，作用力都指向 $\vec{r}$ 的场，称为平方反比场
  - 向量场的连续性
    - 一个向量场在一个点 P 连续，当且仅当该向量场所有的分量函数在该点处连续
  - 向量场的图像绘制
    - 不可能完整画完，所以应该挑选其中比较有代表性的一些点。可以设置 $\vec{F}(x,y,z)=c$ (将其写成 `level curve`)，然后选取不同的常数 c，在其上挑选一些点，绘制图像
- 判断向量场是否保守
  - 保守向量场定义
    - 梯度向量都垂直于 `level curve`
    - 如果某个向量是梯度向量，那么它必然垂直于某个函数的 `level curve`，我们可以通过梯度反推出这个可微分的函数
    - 对于可以反推的向量场（也就是确定该向量场中的向量是梯度向量），我们称该向量场为保守向量场（`conservative vector field`）
    - 准确定义

DEFINITION OF CONSERVATIVE VECTOR FIELD

A vector field **F** is called **conservative** if there exists a differentiable function f such that $\mathbf{F} = \nabla f$. The function f is called the **potential function** for **F**.

- 判断一个向量场是否为保守场
  - 粗浅判断：看是否能找到每个梯度向量的原函数
  - 准确判断：设 $\vec{F}(x,y) = M\vec{i} + N\vec{j}$，当且仅当

    $$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

    时该向量场为保守场。

    > 理由：因为 $M = f_x$，而 $N = f_y$，因此如果对两个偏导函数再求一次导，如果混合导数的结果相同，就代表向量场 $\vec{F}(x,y)$ 确实是一个梯度函数，因此该场为保守场。

- 找到一个保守场的原函数（`potential function`）
  - 部分可以通过肉眼观察直接得到
  - 部分需要进行不定积分运算：对两个分量函数求另一侧积分得到两个不定积分，然后找到不定积分中的对应项，补足不定积分中的常数项即可
  - 这里计算的结果是个不定积分，求得的是个通解；如果需要求解特解，那么通常题目会给予初值条件
- 保守场的来源：物理学中如果一个场是保守场，那么一个物体绕场一圈，它的动能（物体速度带来的能量）和势能（物体位置带来的能量）的和保持不变

- 向量场的旋度（`curl`）

> 旋度确定了在向量场中的一个点是否会发生转动。这里要注意的是 ∇ 不是 ∇F，在旋度的定义中是将 ∇ 和对应函数拆分开了，计算它们的叉乘。

- 3 D 向量场的旋度定义如下
  - 设现有一向量场 $F(x,y,z) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$
  - 该向量场的 `curl` 为

    $$\nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial Z})\vec{i} - (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\vec{k}$$

  - 如果一个向量场中一个点的旋度为正，代表该点有逆时针旋转的倾向；如果旋度为负，代表该点有顺时针旋转的倾向；否则该点保持静止。
  - 当且仅当一个场是保守场时，旋度在该场处处为 0
  - 同样，当且仅当旋度在该场中处处为 0 时，该场是个保守场
- 向量场的散度 （`divergence`）

> 散度定义了向量场中的一个点的净出值。也就是从该点涌出的向量数目-涌入该点的向量数目。这里也要注意 ∇ 不是 ∇F，在散度的定义中是将 ∇ 和对应函数拆分开了，计算它们的点乘。

  - 散度是个常数，而不是一个向量。
  - 散度用 div 表示，它的计算公式是 $\nabla \cdot F(x,y)$，对 3 维空间中的向量场类似
  - 如果散度为 0，则可以称其为 `divergence free`
  - 要求某点的散度，计算公式后带入点坐标即可
- 一个定理：如果 $F(x,y,z) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$，并且 M, N, P 都有连续的二阶导，那么该向量场旋度的散度为 0

线积分

- 平滑曲线概念
  - 一小段曲线平滑的定义是：在其定义域内，每一小段的所有函数都连续，并且不同时为 0
  - 平滑曲线的概念是：该曲线上每一小段的曲线都平滑
- 线积分计算
  - 以前学过的积分复习
  - 普通线积分

    > 注意线积分和弧长的区别：在线积分中，每个线段的微元上，都有一定的权重。线积分是该权重和弧长微元的乘积。也就是说，弧长的计算是不带权重的弧长微元的积分，而线积分是带权重 $f(x,y)$ 的弧长微元的积分。
    > 记得 $dS = |\vec{r}'(t)|dt$

    - 公式
      - 二元情况下 （x, y 两个变量）

        $$\int_c f(x,y)dS$$

        其中 $f(x,y,z)$ 是对应点的权重，dS 是一小段弧长的微元。
        - 如果 x, y 是平面直角坐标系中的变量，那么弧长微元的表达式为

          $$dS = \sqrt{1 + y'}dx$$

          或者

          $$dS = \sqrt{1 + x'}dy$$

        - 如果 x 和 y 是关于 t 的参数函数，也就是说弧长的轨迹由 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ 定义，那么弧长微元的表达式为

          $$dS = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

- 三元情况下（x, y, z 三个变量）

$$\int_c f(x,y,z)dS$$

其他的定义和前文二元变量情况下类似，此处不再赘述。

- 特例：当 f 为常数 1 时，该积分求解的是弧长本身
- 向量场下的线积分（`vector form`）

> 向量场下的线积分也就是我们之前说的类似求功的过程，这里和普通线积分的差别在于普通线积分的权重是个标量，其表达了一条曲线上的弧长微元和权重的乘积的和，应用场景如求解一个质量分布不均匀的线条的总质量。而向量场下的积分中权重是个矢量（如力），求得的是该矢量和弧长微元的向量点乘。应用场景如求做功。弧长上各处都有力的微元，但是他们指向不同的方向，通过计算每个平滑曲线线段上的力和弧长的点乘，我们可以得到该弧长段所做的功。通过对功进行积分，我们可以得到该弧长上的总功。需要注意的是，这里的弧长微元 $d\vec{S}$ 也是一个矢量，但是我们可以将其转化为一个方向向量 $\vec{T}$ 和一个标量 dS 的乘积。

- 公式

$$\int_c f(x,y)d\vec{S} = \int_c f(x,y) \cdot \vec{T}(x,y)dS$$

其中 $\vec{T}$ 是运动方向上的切线。如果 x 和 y 是参数 t 的函数，那么该式子可以写成

$$\int_c f(x,y) \cdot \vec{T}(x,y)dS = \int_c f(x(t),y(t)) \cdot \vec{T}(x(t),y(t))dS$$

其中 dS 的表达式和前文普通线积分中的相同。

- 做功公式推导

$$\vec{F} \cdot \vec{T}dS = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}|\vec{r}'(t)|dt = \vec{F} \cdot \vec{r}'(t)dt = \vec{F}d\vec{r}$$

- 注意：对于向量场中的线积分，定向很重要，如果积分的方向和曲线的轨迹方向相反，则求得的积分也取反
- 另一种形式的向量场线积分计算（`differential form`）
  - 设向量场下的力用 $F(x,y) = M\vec{i} + N\vec{j}$ 表示，其中 M 和 N 都是关于 x 和 y 的函数
  - 设曲线轨迹用 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ 表示
  - 那么该情况下的线积分公式如下

$$
\begin{aligned}
&\int_c \vec{F}(x,y)\cdot\vec{T}dS \\
&=\int_c \vec{F}(x,y)\cdot\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}|\vec{r}'(t)|dt \\
&=\int_c \vec{F}(x,y)\cdot\vec{r}'(t)dt \\
&=\int_c (M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt})dt \\
&=\int_c Mdx+Ndy
\end{aligned}
$$

> 三变量的情况可以根据此公式延伸

保守向量场（conversative vector fields）和独立路径（independent path）

- 线积分基本定理（`Funmdamental theorem of line integrals`）
  - 在向量场的线积分中，如果有向量 $F(x,y)=M\vec{i}+N\vec{j}$ 是某个函数 $f(x,y)$ 的梯度，那么该向量场的线积分等于终点处的 f 函数值-起点处的 f 函数值（也就是说该向量场是个梯度势能场，如果起点和终点相同，从起点到终点的路径不影响做功，其做功量就是两点之间的势能差），我们称该场为保守场
  - 用公式如下（如果该场是个势能场，则从 a 到 b 的做功与路径无关，只同 a 和 b 两点的位置有关）

$$\int_c F(x,y)\cdot d\vec{r}=\int_c \nabla f(x,y)\cdot d\vec{r}=f(x(b),y(b))-f(x(a),y(a))$$

  - 对于三变量函数，情况类似
- 路径独立性概念理解
  - 复习：如何判断一个三变量的函数是否为梯度场？可以参考这个油管视频：[How to Test if a Vector Field is Conservative // Vector Calculus (youtube.com)]
    - 具体来说，设一个函数为 $\vec{F}(x,y,z)=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$，这里的 M、N 和 P 分别为

$$
\begin{aligned}
M&=\frac{\partial F}{\partial x}\\
N&=\frac{\partial F}{\partial y}\\
P&=\frac{\partial F}{\partial z}
\end{aligned}
$$

    - 因为我们之前学过混合求导

$$\frac{\partial F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y\partial x}$$

    - 因此存在以下关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial x\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial y\partial z}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

- 如果对一个 3 元函数存在以上关系，那么该向量 $\vec{F}(x,y,z)$ 为梯度向量，其存在于势能场中。该向量场是个保守场，其中两点之间的线积分（做功）的大小只与起始点和终点有关。该场中具有路径独立性
- 如果一个函数 $\vec{F}(x,y,z)$ 是个梯度函数，那么它在保守场中，其做功仅仅取决于起点和终点，与其行走的路径无关。这种性质我们称之为路径独立性
- 引申定理：对于保守场，如果做功的路径是个封闭曲线，那么其势能变化为 0，也就是说做功为 0
- 以下几个概念含义相同
  - $\vec{F}(x,y,z)$ 是个梯度函数
  - $\vec{F}(x,y,z)$ 所在的场是保守场
  - 在 $\vec{F}(x,y,z)$ 所在的保守场中，其做功具有路径独立性
  - 沿着该场中的封闭曲线做功一周，势能的变化为 0，做功量为 0
- 通过引入保守场和路径独立性的概念，我们对于保守场中的做功计算（向量场线积分），有如下几种方式
  - 将 $\vec{F}(x(t),y(t),z(t))$ 直接利用线积分公式求解，如果该函数中没有参数（即变量为 x,y,z 的话），就设定一个参数，然后利用线积分的公式求解
  - 直接利用保守场的性质，求解该场的势能函数。该向量在该路径上的做功量，就等于终点处的使能-起点处的势能
  - 因为路径独立性，所以可以将复杂路径中的做功求解，转化为更简单的路径中的做功求解

- 机械能守恒定律：在一个保守场中，动能和势能的和保持不变。动能是物体的运动所产生的能量，势能是物体的位置变化所产生的能量。

格林公式

> 注意：格林公式仅仅用于闭合的曲线！其他形式的曲线请规规矩矩地用普通的线积分！

- 格林公式介绍
  - 具体定义：对于不保守的场，简单连通平面区域（单连通区域） R 的二重积分等于逆时针绕该平面边界的线积分的值（因为如果是保守场，绕该圈一周的线积分等于 0 嘛）
  - 简单连通区域
    - 简单：表示该平面的边界没有路径的交叉
    - 定义：所有 R 的边界上（内部边界也算边界）的点，所包含的点都属于 R（**简而言之区域 R 中间没有洞**，有洞的话，洞内部的点被内部边界环住，但是却不属于 R）

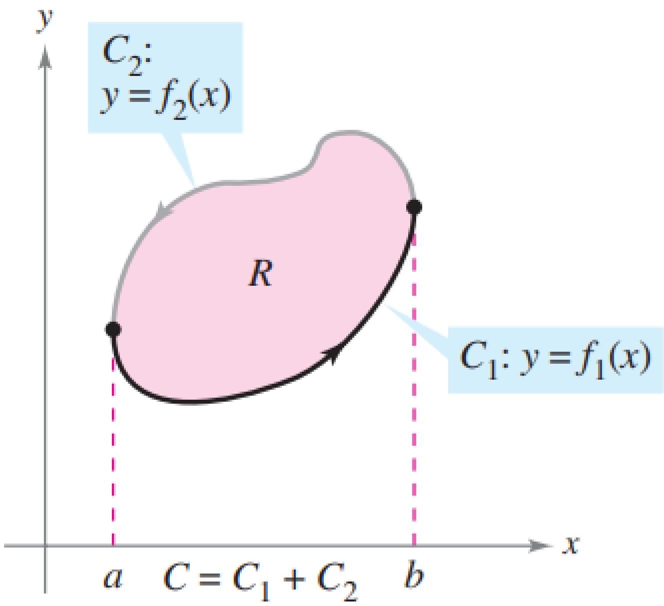
- 公式
  - 假设 M 和 N 都在一个包含 R 的开区间上有连续的一阶导数，那么

$$\int_c Mdx + Ndy = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})dA$$

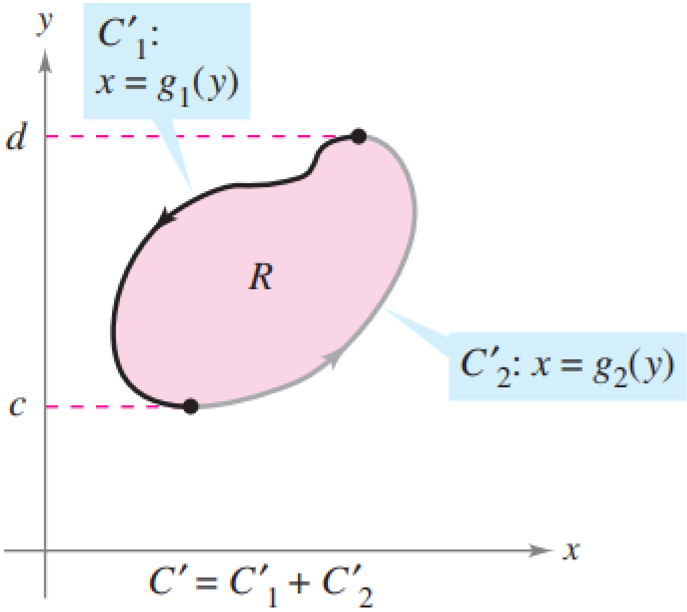
  - 推导
    - 原式准确来写应该是这样

$$\int_c M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_R (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})dA$$

    - 我们从 2 个方向分别进行积分（x 和 y），计算绕单连通区域一圈的线积分



R is vertically simple.



R is horizontally simple.

Figure 15.27

- x 轴方向
  - 绕该单连通区域一周的线积分可分割为：从 $x = a$ 到 $x = b$ 对 $M(x, f_1x)$ 进行线积分+从 $x = b$ 到 $x = a$ 对 $M(x, f_2(x))$ 进行线积分
  - 公式为

$$
\begin{aligned}
&\int_c M(x,y)dx = \int_a^b M(x,f_1(x)) + \int_b^a M(x,f_2(x)) \\
&= \int_a^b M(x,f_1(x)) - \int_a^b M(x,f_2(x)) \\
&= \int_a^b (M(x,f_1(x)) - M(x,f_2(x)))dx \\
&= \int_a^b \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dydx \\
&= -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dydx \\
&= -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dA
\end{aligned}
$$

- y 轴方向
    - 绕该单连通区域一周的线积分可分割为：从 $y=c$ 到 $y=d$ 对 $N(g_2(y),y)$ 进行线积分+从 $y=d$ 到 $y=c$ 对 $N(g_1(y),y)$ 进行线积分
    - 公式为

$$
\begin{aligned}
&\int_c N(x,y)dy = \int_c^d N(g_2(y),y)dy + \int_d^c N(g_1(y),y)dy \\
&= \int_c^d N(g_2(y),y)dy - \int_c^d N(g_1(y),y)dy \\
&= \int_c^d (N(g_2(y),y) - N(g_1(y),y))dy \\
&= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dxdy \\
&= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dA
\end{aligned}
$$

- 因为

$$
\begin{aligned}
&\int_c M(x,y)dx = -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dA \\
&\int_c N(x,y)dy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dA
\end{aligned}
$$

- 那么等式左右分别相加可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_c M(x,y)dx + \int_c N(x,y)dy \\
&= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dA - \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dA \\
&= \iint_R (\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y})dA
\end{aligned}
$$

- 格林公式得证

- 格林公式的来源和意义

> 这节是课本中没有的，我个人加进来。我认为这个点非常重要，但是遗憾的是课本中没有提到。油管中这个视频 Green's Theorem, explained visually (youtube.com) 的讲解比较充分。此外，

- 首先，我们观察格林公式的右半边，发现了一个熟悉的结构

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

- 欸？我们之前不是学过一个旋度的定义？当向量场定义为 $\vec{F}(x,y)=M(x,y)\vec{i}+N(x,y)\vec{j}$ 时，旋度公式同上述结构相同
- 因为旋度定义为

$$\nabla\times\vec{F}(x,y)$$

- 因此格林公式可以改写如下

$$\int_c M(x,y)dx+\int_c N(x,y)dy=\iint_R \nabla\times\vec{F}(x,y)dA$$

- 那么问题来了，为什么可以这么定义？线积分、旋度和面积之间是什么样的关系？
  - 根据前文对线积分的定义，我们了解到，可以把对一个曲面求解线积分，转化为对这个单连通区域内的无穷个小的单连通区域的线积分的和。因为方向不同的边的积分会取消。
  - 那为什么使用旋度？因为旋度的正负衡量了向量场中的这个点是顺时针旋转还是逆时针旋转。如果整个单连通区域是顺时针旋转，那么这个单连通区域中的每个小点处的线积分加起来的结果应该为负；否则为正。
  - 那么整个单连通区域和每个小的单连通区域是什么关系呢？整个单连通区域的面积是所有小的单连通区域的面积的和，那么这个公式就可以得出来了。
  - 简单地说：格林公式就是把**所有小的面积下的旋度加起来**
- 使用格林公式计算线积分
  - 确定 M 和 N，直接利用公式计算
  - 把 $\vec{F}(x,y)$ 转化为 $\vec{r}(t)$，然后利用前面学过的线积分公式计算
  - 转化为极坐标进行计算
  - 保守场中的线积分计算结果恒为 0
- 利用格林公式与线积分的关系，由线积分计算面积，或者由面积计算线积分

> 注：可以通过插入分割线，将有洞的区域转化为单连通区域，然后利用格林公式计算面积/线积分

- 因为当

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=1$$

时，格林公式右边转化为了对面积的积分

$$\int_c M(x,y)dx + \int_c N(x,y)dy = \iint_R dA = A$$

因此要计算面积，我们可以找一个让 $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$ 成立的 $\vec{F}(x,y)$

- 要满足上述的式子，我们可以让

$$M = \frac{-y}{2}$$
$$N = \frac{x}{2}$$

- 因此

$$A = \frac{1}{2}\int_c xdy - ydx$$

- 使用格林公式的变式：3 维空间中的曲面延伸
  - 研究三维空间中的曲线，延伸到 `Stokes's theorem`
    - 设空间中的向量场为 $\vec{F}(x,y,z) = M\vec{i} + N\vec{j} + 0\vec{k}$
    - 那么在该场中的旋度为

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{\partial N}{\partial z})\vec{i} - (-\frac{\partial M}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\vec{k}$$

    - 该场中的线积分为

$$\int_c Mdx + Ndy = \iint_R (\nabla \times \vec{F}(x,y,z)) \cdot \vec{k}dA$$

    - 将该式扩展到三维空间中的曲面，可得 `Stokes's theorem`
  - 研究向量场的法向量，延伸到 `divergence theorem`
    - 当我们研究法向量的线积分时，我们无法直接研究 $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$
    - 我们设曲线的位移向量 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$
    - 但是因为在线积分的时候我们使用的是 $\int_c \vec{F} \cdot \vec{T}ds$，因此在这里我们选择用 s 作为向量值函数的单位。因此这里使用 $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$
    - 那么该向量值函数的切向量可以表示为 $\vec{r}'(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}$
    - 因为切向量和法向量的点乘为 0，因此我们可以设法向量为 $\vec{N}(s) = y'(s)\vec{i} - x'(s)\vec{j}$
    - 那么原线积分式子就可以写成

$$
\begin{aligned}
&\int_c \vec{F}(x,y)\cdot\vec{N}ds = \int_c (M\vec{i}+N\vec{j})\cdot(y'(s)\vec{i}-x'(s)\vec{j})ds \\
&= \int_c (M(x,y)y'(s)-N(x,y)x'(s))ds \\
&= \int_c Mdy - Ndx \\
&= \int_c -Ndx + Mdy
\end{aligned}
$$

- 又因为根据格林公式

$$
\int_c M(x,y)dx + \int_c N(x,y)dy = \iint_R \nabla\times\vec{F}(x,y)dA
$$

- 原式改写如下

$$
\int_c -Ndx + Mdy = \iint_R (\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y})dA
$$

- 因此推出

$$
\int_c \vec{F}\cdot\vec{N}ds = \iint_R div\vec{F}dA
$$

- 将该式扩展到 3 维空间得到的形式称为 `divergence theorem`

曲面的参数表示

- 参数曲面的概念理解及绘制
  - 普通参数曲线复习
    - 二维平面中，参数曲线为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$
    - 三维平面中，参数曲线为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$
    - 共同特点：其在 x,y,z 轴上的三个坐标都是关于 t 的函数
  - 参数曲面定义
    - 定义
      - 参数曲面的两个变量为 u,v（定义域在平面区域 D 中），其三个参数方程为

$$
\begin{aligned}
x &= x(u,v) \\
y &= y(u,v) \\
z &= z(u,v)
\end{aligned}
$$

      - 参数方程

$$
\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}
$$

    - 为什么有两个变量？
      - 如果只有 1 个变量的话，那么就是空间中的一条曲线；如果没有 $\vec{k}$ 分量，其在 xOy 平面上就是一条曲线。

        - 如果有 2 个变量的话，就是空间中的一个曲面；像任何一个轴投影，都是关于 x 和 y 的一个平面；
        - 如果有 3 个变量的话，就是空间中的一个三维立体图形；像任何一个轴投影，都是关于 x 和 y 的一个平面
    - 为什么有 3 个参数方程？如果只有 2 个的话，就变成了 $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j}$，那么该位移向量就只有 2 个分量，不能算曲面啦！这是平面中的一个参数方程啦！
  - 参数曲面的绘制：消参+观察无法消去参数的轴，同参数的关系
- 用一组参数方程表示曲面
  - 如果 z 是关于 x 和 y 的函数，那么空间中的点 $(x, y, f(x,y))$ 可以用向量 $x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$ 来表示
  - 如果是旋转体，就需要在函数中带上 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$
    - 例 1：函数 $y = f(x)$ 关于 x 轴旋转得到的图形
      - $x = u, y = f(u)\cos v, z = f(u)\sin v$
      - 其中 $a \le u \le b, 0 \le v \le 2\pi$
    - 例 2：函数 $x = f(z)$ 绕 z 轴旋转
      - $z = u, x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v$
- 参数曲面的切向量，法向量和切平面
  - 参数曲面的形式回忆

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

    其中 u 和 v 是该曲面的两个坐标轴变量，而 x，y 和 z 是关于这两个变量的函数
  - 参数曲面的切向量
    - 偏导回忆
      - 设现在有函数 $F(x,y)$，其中 x 和 y 都是关于 u 和 v 的函数
      - 那么 $\frac{\partial F}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial v}$ 就是 F 对 u 和 v 的偏导，由链式法则求解得到
    - 向量值函数下的偏导和切向量求解

      > 这里要注意的是，x, y, z 只是各个方向上的函数，而不是变量；如果要求解对于变量 u 和 v 的导数，那么结果必然不与 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 平行，而是这三个单位向量的线性组合。

      - 对于一个关于 2 变量 u, v 的位移向量，它的三个维度的值分别由 3 个函数 x, y, z 决定，这三个函数都是关于 u 和 v 的函数。因此，我们在讨论向量值函数下的偏导 (以及其他特性) 时，一般而言是对 3 个维度下的函数分别讨论
      - $\vec{i}$ 方向上
        - x 关于 u 的变化率：$\frac{\partial x}{\partial u}$
        - x 关于 v 的变化率：$\frac{\partial x}{\partial v}$
      - $\vec{j}$ 方向上
        - y 关于 u 的变化率：$\frac{\partial y}{\partial u}$

- y 关于 v 的变化率：$\frac{\partial y}{\partial v}$
- $\vec{k}$ 方向上
  - z 关于 u 的变化率：$\frac{\partial z}{\partial u}$
  - z 关于 v 的变化率：$\frac{\partial z}{\partial v}$
- 因为这里的基底变量是 u 和 v，因此我们需要分别求解向量值函数 $\vec{r}(u,v)$ 关于 u 和 v 在各个方向上的偏导
- 因此，向量值函数 $\vec{r}(u,v)$ 关于 u 的变化率为

$$\vec{r}_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$

- 而向量值函数 $\vec{r}(u,v)$ 关于 v 的变化率为

$$\vec{r}_v = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

- 这两个偏导构成了在 (u,v) 一点上的切向量的值
- 对于平面上的点 $P(x_0,y_0)$，代入即可得到该点处的切向量的值

- 参数曲面的法向量
  - 一个小的切平面的法向量，同时垂直于两个切向量
  - 因此法向量由两个切向量进行叉乘得到

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

  - 对于某一点处的法向量求解
    - 首先将点坐标带入切向量公式，求得切向量
    - 然后通过法向量公式计算法向量公式
    - 然后将该点带入法向量公式，求得法向量
- 参数曲面的切平面
  - 切平面的构成要素：一个垂直于该平面的法向量 $\vec{n}$ +经过该平面的一点 $P(x_0,y_0)$，然后利用平面公式可得切平面公式
- 参数曲面的面积表示
  - 二重积分形式下的面积计算复习
    - 设现有函数 $z=f(x,y)$
    - 二重积分下的面积是面积微元进行积分构成，而面积微元是以切平面近似曲面
    - 首先我们要明确如何表示一个面积微元，也就是一小块切平面的面积。当 x 不变，y 前进 Δy 个单位时，切平面在 z 方向上的变化为 $\Delta y f_y$，该向量可用 $(0,\Delta y,f_y\Delta y)$ 来表示；并且，当 y 不变，x 前进 Δx 个单位时，切平面在 z 方向上的变化为 $\Delta x f_x$，该向量可以用 $(\Delta x,0,f_x\Delta x)$ 来表示
    - f_y 方向上的向量和 f_x 方向上的向量构成了一个菱形，因为根据前文我们知道，一个菱形的面积是两个向量的叉乘。因此由向量 $(0,\Delta y,f_y\Delta y)$ 和 $(\Delta x,0,f_x\Delta x)$ 构成的菱形的叉乘计算如下

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Delta y & f_y \Delta y \\ \Delta x & 0 & f_x \Delta x \end{vmatrix}$$

- 根据行列式的性质，我们可以从行列式第二行提取出一个共有的乘项因子 Δy，并且可以从第三行提取出一个共有的乘项因子 Δx，那么该行列式的形式可以改变为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f_y \\ 1 & 0 & f_x \end{vmatrix} \Delta y \Delta x$$

- 那么该式的计算结果为

$$(f_x \vec{i} + f_y \vec{j} - \vec{k}) \Delta y \Delta x$$

- 那么该向量的叉乘的大小为

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dy dx$$

- 参数曲面的面积计算
  - 设现有参数曲面

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

    其中 x, y, z 是关于 u 和 v 的函数。
  - 参数曲面的面积微元表示
    - 根据前文的分析，如果切平面上的两个切向量为 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$
    - 那么一个切平面的面积，可以通过两个切向量方向上，长度为 du 和 dv 的微元向量叉乘得到。
    - 因此 $dS = |(\vec{r}_u du) \times (\vec{r}_v dv)| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$
  - 参数曲面的面积表示

    > 注意 dS 和 dA 的区别，dS 表示的是曲面面积的微元，而 dA 表达的是平面面积微元，是 dS 在平面上的投影，而投影的高度为 $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$

$$S = \iint_R dS = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \iint_R |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

    其中 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 分别为

$$\vec{r}_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$$
$$\vec{r}_v = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

- 二重积分下的面积和参数曲面面积公式的联系
  - 二重积分 $z = f(x, y)$ 用向量值函数表示为 $\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$

- 如果要转化为以 u 和 v 为底的，那么 $x=u, y=v, f(x,y)=f(u,v)$
- 将二重积分公式重新表达如下

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+f(u,v)\vec{k}$$

- 那么两个切平面向量分别为

$$\vec{r}_u=\vec{i}+0\vec{j}+\frac{\partial f(u,v)}{u}\vec{k}$$
$$\vec{r}_v=0\vec{i}+\vec{j}+\frac{\partial f(u,v)}{v}\vec{k}$$

- 那么这两个向量的叉乘为

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u}\\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v}\end{vmatrix}=(-\frac{\partial f}{\partial u})\vec{i}-(\frac{\partial f}{\partial v})\vec{j}+\vec{k}$$

- 该叉乘的大小为

$$|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|=\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}$$

- 那么面积微元的值就是

$$dS=\iint_R|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv=\iint_R\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}dudv$$

- 又因为 $x=u, y=v$，因此 $dx=du, dy=dv$
- 那么原式为

$$dS=\iint_R\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dxdy=\iint_R\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA$$

- 该式子与上述参数曲面的积分微元形式相同，那么积分以后的面积表达式必然相同，证明 $z=f(x,y)$ 和 $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$ 具有相同的面积分形式

曲面积分

- 参数曲面的曲面积分计算
  - 曲面积分介绍

> 注意：要将积分因子和曲面定义区分开。在前文我们说过，曲面是一个关于两个变量的函数（如果是关于 3 个变量的函数，那么就变成三维空间中的一个立体图形啦），而积分的因子是一个关于 x,y,z 三个变量的函数（你可以把这个积分因子看作密度，它定义了三维空间中的某个点的密度，因此它的变量是 3 个变量）

- 曲面积分的定义同线积分类似，其在每个微元面积上加上一个权值
- 这个权值可以是 1（那么积分计算出的就是曲面的面积）

        - 也可以是个常数 c （那么这个曲面的厚度就是 c）
        - 也可以是一个关于 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$
        - 通用的表达式是使用函数作为积分的因子，这个函数可以理解为曲面上某个微元的密度。对所有曲面微元的面积和密度进行积分，可以求得最后的质量
        - 曲面积分
            - 公式

$$\iint_R f(x, y, z) dS$$

              其中 dS 就是我们前一节求得的 dS
            - 如果 $z = g(x, y)$，那么 $f(x, y, z)$ 就变成 $f(x, y, g(x, y))$
            - $x = g(y, z)$，和第一条同理
            - $y = g(x, z)$，和第一条同理
    - 曲面积分计算
        - 直接使用公式计算
        - 将带 z 的函数投影到 xOy 平面上，然后利用公式计算
        - 部分涉及到不连续函数的情况下注意使用反常积分计算
    - 曲面积分 vs 线积分形式
        - 曲面积分形式如下

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

        - 线积分形式如下

$$\int_c f(x, y, z) ds = \int_c f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

        - 是不是很类似！
- 曲面的定向（`orientation`）：计算通量的前置条件
    - 曲面可定向性的概念
        - 单位法向量被用于曲面 S 的定向。如果对曲面 S 中每个非边界的点都有单位法向量 $\vec{n}$ 的话，那么该曲面是可定向的。一半曲面的方向是指从曲面向外指的那个方向。
    - 单位法向量的求解
        - 根据前文的内容，一个曲面在一个点的法向量和两个平面切向量垂直
        - 方法 1：参数曲面方程为向量值函数$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$
            - 其两个切平面向量分别为 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$
            - 那么其法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$
            - 转化为单位向量则为

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

或者

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_v\times\vec{r}_u}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$$

- 方法 2：参数曲面方程为 $z=f(x,y)$（也可以是 $x=f(y,z)$ 或者 $y=f(x,z)$，这两种可以自行推导其法向量公式）
  - 通过第 13 章的知识我们知道，一个 `level curve` 或者 `level surface` 的梯度向量总是跟这个 `level curve` / `level surface` 垂直
  - 那么首先我们将该参数曲面转化为一个 `level surface`
  - 第一种 `level curve`

$$G(x,y,z)=f(x,y)-z=0$$

    - 该函数的梯度向量是 $\nabla G=(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},-1)$
    - 那么该梯度向量方向上的单位向量是

$$\vec{n}=\frac{\nabla G(x,y,z)}{|\nabla G(x,y,z)|}=\frac{G_x\vec{i}+G_y\vec{j}-\vec{k}}{|G_x\vec{i}+G_y\vec{j}-\vec{k}|}$$

  - 第二种 `level curve`

$$G(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

    - 该函数的梯度向量是 $\nabla G=(-\frac{\partial G}{\partial x},-\frac{\partial G}{\partial y},1)$
    - 那么该函数梯度向量方向上的单位向量是

$$\vec{n}=\frac{\nabla G(x,y,z)}{|\nabla G(x,y,z)|}=\frac{-G_x\vec{i}-G_y\vec{j}+\vec{k}}{|-G_x\vec{i}-G_y\vec{j}+\vec{k}|}$$

- 曲面的通量（`flux`）：与法向量点乘的曲面积分形式
  - 向量值函数形式（$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$）下的曲面通量定义
    - 曲面的通量和流过这个曲面的流体量有关，只不过这个流体是用向量场的形式表达的；具体表现为在**某个曲面微元上**，**垂直于该曲面微元的**流体流量
    - 流体的流量=横截面积 * 垂直于该面积的流速（因为是单位时间）
    - 流速求解：通过该曲面的向量场为 $\vec{F}(x,y,z)$，而通过垂直于该面积微元的单位法向量为 $\vec{n}$，那么该向量场在法向量上的投影为 $\vec{F}\cdot\vec{n}$
    - 横截面积：dS
    - 计算出了流体流量，我们需要乘上这个曲面微元的面积，那么曲面微元上通量的定义就是

    > 注意这里是 dS 而不是 dA，其区别在于 dS 是曲面微元，而 dA 是平面面积微元，也可以是曲面在 xOy 平面上的投影

$$\Delta V=\iint_R\vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

- 因此流体的流量就是

$$V=\iint_R \vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

- 如果说在这个积分式子中加一项密度 $\rho(x,y,z)$，密度是一个关于向量场坐标的函数，那么求得的就是该流体的质量

$$m=\iint_R \rho(x,y,z)\vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

- $z=f(x,y)$ 形式下的曲面通量定义
  - 设空间中的向量场为 $\vec{F}(x,y,z)$
  - 该曲面的通量的求解有 2 种方法
  - 方法 1：将函数形式的曲面转化为向量值函数的形式，然后根据向量值函数下的曲面通量定义求解
    - 该曲面可以转化为如下形式的向量值函数

$$\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$$

    - 那么该向量值函数的切平面的构成分量分别为 $(\Delta x,0,f_x\Delta x)$ 和 $(0,\Delta y,f_y\Delta y)$
    - 那么垂直于该切平面的法向量为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \Delta x & 0 & f_x\Delta x\\ 0 & \Delta y & f_y\Delta y\end{vmatrix}$$

    - 根据行列式性质，从第二行提取出一个 Δx，从第三行提取出一个 Δy，得到的结果为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\end{vmatrix}\Delta x\Delta y$$

    - 该法向量为

$$\vec{n}=((-f_x)\vec{i}-(f_y)\vec{j}+\vec{k})\Delta x\Delta y$$

    - 我们在积分式中按照微元来计算，那么就不使用 Δx 和 Δy，而是使用 dx 和 dy。那么法向量的表达式可以改写为

$$\vec{n}=((-f_x)\vec{i}-(f_y)\vec{j}+\vec{k})dxdy$$

    - 曲面的通量公式为（这里我们用大写的 N 来表示单位法向量，和前面的法向量区分开来）

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{N}dS$$

- 单位法向量为

$$\vec{N}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

- 因为 dS 就是叉乘得到的法向量的大小，是一个标量

$$dS=|\vec{n}|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dxdy=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA$$

- 因此原式可改写为

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_R \vec{F}\cdot(\frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA)=\iint_R(-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k})$$

- 方法 2：将函数转化为 `level surface` 形式，直接利用梯度单位向量作为法向量，然后根据向量值函数下的曲面通量定义求解
  - 原式为 $z=f(x,y)$，我们将其转化为 $G(x,y,z)=z-f(x,y)=0$；该面是个 `level surface`，那么该曲面的梯度向量为

$$\nabla G=-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}$$

  - 该梯度向量垂直于 `level surface`，是它的法向量，那么该梯度向量方向上的单位法向量为

$$\vec{N}=\frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{|-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}|}=\frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}$$

  - 又因为前面推导可知

$$dS=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA$$

  - 那么原积分式可写为

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_R \vec{F}\cdot\frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}dA=\iint_R \vec{F}\cdot(-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+$$

  - 该形式与前文我们将 $z=f(x,y)$ 转化为向量值函数求解，得到的结果一致
- 两种形式的曲面通量求解总结

> 要注意的是曲面的定向。如果是 $\vec{r}_x\times\vec{r}_y$，其定向可利用右手定则从 $\vec{r}_x$ 向 $\vec{r}_y$ 旋转确定；如果是 $\vec{r}_y\times\vec{r}_x$，其定向可利用右手定则从 $\vec{r}_y$ 向 $\vec{r}_x$ 旋转确定。

- 设该函数为 $z=f(x,y)$，其在两个方向上的切向量分别为 $\vec{r}_x=(dx,0,f_x dx)$ 和 $\vec{r}_y=(0,f_y,f_y dy)$
- 通过前面的推导，我们可以看出两种形式的推导结果相同，也就是说对于 $z=f(x,y)$，既可以通过转化为向量值函数，然后求解，也可直接利用梯度向量求解
- 如果计算时使用 $\vec{r}_x\times\vec{r}_y$，那么其对应的 `level surface` 是 $G(x,y,z)=z-f(x,y)=0$，计算出的曲面通量为

  $$\iint_R \vec{F}\cdot(-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k})dA$$

  曲面定向朝上。
- 如果计算时使用 $\vec{r}_y\times\vec{r}_x$，那么其对应的 `level surface` 是 $G(x,y,z)=f(x,y)-z=0$，计算出的曲面通量为

  $$\iint_R \vec{F}\cdot(f_x\vec{i}f_y\vec{j}-\vec{k})dA$$

  曲面定向朝下。

线积分和面积分公式总结

- 线积分
  - 弧长微元的表示

    $$ds=|\vec{r}'(t)|dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

  - 积分因子为 1：弧长计算

    $$\int_c ds=\int_c|\vec{r}'(t)|dt=\int_c\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

  - 积分因子为 $f(x,y)$：线质量计算

    $$\int_c f(x(t),y(t))ds=\int_c f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

  - 积分因子为 $\vec{F}\cdot d\vec{r}$：功计算

    $$\int_c\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\int_c\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}ds=\int_c\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)dt$$

- 曲面积分（函数形式）
  - 设该曲面的方程为 $z=g(x,y)$
  - 面积微元的表示

    $$dS=\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dA$$

  - 积分因子为 1：表面积计算

$$\iint_R dS=\iint_R \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dA$$

- 积分因子为 $f(x,y,z)$：曲面质量计算

$$\iint_R f(x,y,z)\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dA=\iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dA$$

- 积分因子为 $\vec{T}$：通量计算

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_R \vec{F}\cdot(-g_x\vec{i}-g_y\vec{j}+\vec{k})dA=\iint_R \vec{F}\cdot\nabla GdA$$

- 曲面积分（参数形式）：$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$
  - 面积微元的表示

$$dS=\iint_R |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dA=\iint_R |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv$$

  - 表面积计算

$$S=\iint_R dS=\iint_R |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dA=\iint_R |\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv$$

  - 曲面质量计算：设曲面上每个面积微元的密度为 $f(x,y,z)$

$$S=\iint_R f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))dS$$

  - 通量计算

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint_R \vec{F}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dA$$

高斯散度定理（`Divergence theorem`）

> 课本这一章中，很多的公式都是直接拍你脸上，并没有给出其他的解释，所以在学习的过程中我参考了大量的油管视频。这一节可以参考这个视频：The Divergence Theorem, a visual explanation (youtube.com), 但是这个视频只是简单的讲述了一些累加的原则。对于高斯散度定理讲解的更清楚的是这个视频：Gauss Divergence Theorem. Get the DEEPEST Intuition. (youtube.com) **它类比了格林公式计算的时候，累加多个内部面积微元的旋度来近似整个平面的旋度的方法。高斯散度定理就是累加多个体积内体积微元的散度，来近似闭合体积表面的散度。它的思想和格林公式是异曲同工的。后面的斯托克斯公式也是一样，很精彩！** 证明的过程可以参考可汗学院的的这个视频：Divergence theorem proof (part 1) (video) | Khan Academy

- 散度定理的理解和使用：曲面通量 （积分式为 $\vec{F}\cdot\vec{N}dS$） 形式的 3 维空间扩展
  - 曲面通量形式复习

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$$

- 散度定理定义
  - 设 Q 是一个被曲面 S 包裹的三维立体图形，其单位法向量默认朝向 Q 外，设 $\vec{F}$ 是 Q 上具有连续一阶导数的向量场，那么存在如下关系

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_Q div\vec{F}dv$$

- 散度定理的简单解释
  - 格林公式复习：格林公式的主要思想是，存在一个单连通区域，其内部面积微元上旋度的累加和，等于这个单连通区域的面积上的旋度累加和，就等于绕这个单连通区域一圈的线积分。因为旋度有正有负，正的旋度表明在这个单连通区域上，向量场整体逆时针旋转；负的旋度表明在这个单连通区域上，向量场整体顺时针旋转；而旋度为 0 时，这个单连通区域不旋转。
  - 散度定理的含义：散度的概念是，如果散度大于 0，那么代表这个点的向量场净值朝外，也就是这个点的主要方向是流出；如果散度小于 0，代表这个点的向量场净值朝内，也就是这个点的主要方向是流入；否则这个点最终没有向量流入和流出。那么对于一个三维的体积，这个体积整体的散度值是内部所有体积微元的散度值的累加和。如果累加和大于 0，那么这个体积存在净向量流出；如果累加和小于 0，那么这个体积存在净向量流入；否则流入和流出的向量值相等。
- 散度定理数学证明

> 课本的证明部分虽然确实是完整，但是没有给任何的解释，还是很鸡肋。

  - 因为通过前面的内容我们知道，单位垂直法向量可以通过对函数求解梯度得到（这里我们使用 $\vec{n}$，）

$$\vec{n} = \frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{|-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}|} = \frac{-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

  - 设 $\vec{F}(x,y,z) = M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$，将其带入到曲面积分的表达式中可以得到

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_R (M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k})\cdot(\frac{\nabla G}{|\nabla G|})|\nabla G|dA = \iint_R (M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k})\cdot(\nabla G)dA$$

  - 我们将 ∇G 带入得到如下式子

$$\iint_R \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_R (M(\vec{i}\cdot\nabla G)+N(\vec{j}\cdot\nabla G)+P(\vec{k}\cdot\nabla G))dA$$

  - 我们的证明目标是

$$\iiint_Q div\vec{F}dV = \iiint_Q (\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z})dV$$

  - 我们将这个证明分为三个部分

- 证明 $P(\vec{k}\cdot\nabla G)dA=\frac{\partial P}{\partial z}dV$
    - 我们假设一个封闭的三维立体图形的上层面是 S_1，其方程为 $z=g_1(x,y)$；下层面是 S_2，其方程为 $z=g_2(x,y)$；侧面是 S_3
    - 我们假设上层面的法向量朝上，$\vec{n}_1=(-f_x,-f_y,1)$；下层面的法向量朝下 $\vec{n}_2=(f_x,f_y,-1)$
    - 那么

$$
\begin{aligned}
&\iint_R P(x,y,z)(\vec{k}\cdot\nabla G)dA\\
&=\iint_{S_1} P(x,y,g_1(x,y))(\vec{k}\cdot(-f_x\vec{i}-f_y\vec{j}+\vec{k})dA+\iint_{S_2} P(x,y,g_2(x,y))(\vec{k}\cdot(f_x\\
&=\iint_{S_1} P(x,y,g_1(x,y))dA-\iint_{S_2} P(x,y,g_2(x,y))dA\\
&=\iiint_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)}\frac{\partial P}{\partial z}dzdA\\
&=\iiint_V\frac{\partial P}{\partial z}dV
\end{aligned}
$$

- 证明 $M(\vec{i}\cdot\nabla G)dA=\frac{\partial M}{\partial x}dV$，以及证明 $N(\vec{j}\cdot\nabla G)dA=\frac{\partial N}{\partial y}dV$
    - 证明方法总体同上，只是坐标轴换了，此处不再赘述

- 用散度定理计算三维立体图形的通量，适当时候要转化为极坐标进行计算

斯托克斯定理 (`Stokes's theorem`)

> 斯托克斯公式的思想和格林公式，以及高斯定理都是异曲同工的。学习的过程中可以参考这个油管视频：[Stokes (Curl) Integral Theorem Intuitively Explained (youtube.com)](https://www.youtube.com) 斯托克斯公式是格林公式在 3 维空间中的拓展。

- 斯托克斯公式的理解和使用：格林公式（积分式为 $\vec{F}\cdot\vec{T}ds$）计算线积分的 3 维空间扩展

    > 注意：不要像使用洛必达法则那样，把格林公式和斯托克斯公式当唯一计算线积分的方法；线积分和格林/斯托克斯公式哪个方便用就用哪个；其性质都是等价的。

    - 曲面的定向：右手绕曲面旋转方向弯曲，大拇指指向的方向就是曲面法向量的方向
    - 格林公式计算线积分复习
        - 格林公式表明，**围绕一个平面单连通区域走一周的线积分**，就等于这个**平面单连通区域**的面积微元上的旋度的累加和
    - 斯托克斯定理定义
        - 围绕**空间中一个曲面边界走一周的线积分**，就等于这个曲面的面积微元上的旋度的累加和，定理表示如下曲面（使用 $\vec{N}dS$ 是因为一个面积微元的方向是垂直于该面积微元的法向量的方向 $\vec{N}$，dS 是该面积微元的大小）

$$\int_c\vec{F}\cdot\vec{T}ds=\int_c Mdx+Ndy+Pdz=\iint_S(curl\vec{F})\cdot\vec{N}dS$$

    - 斯托克斯公式的证明：参考这个视频

- 斯托克斯公式的简单解释：斯托克斯公式是格林公式在三维空间中的拓展，其主要思想和格林公式相同，只不过原先平面中的 dA，换成了 $\vec{N}dS$，此处不再赘述。
- 使用旋度分析三维空间中旋转流体的运动

总结

- 微积分基本定理

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

- 线积分基本定理

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

- 格林公式

$$\int_c Mdx + Ndy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dA = \int_c \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (curl\vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$
$$\int_c \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \iint_R div\vec{F} dA$$

- 散度定理

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iiint_Q div\vec{F} dV$$

- 斯托克斯定理

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (curl\vec{F}) \cdot \vec{N} dS$$